· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	•	•	•	•	· · ·		· ·	•	•		P	R	0	E	B B 1	L	E		M	١	· · ·		L	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	F)) 10	V Q	· · ·	+1	ho	t	- - ,		· · ·	f	NO		-	a	U			γ			e	ŀ	Ч		,	•		• • • • •	•	•	· · ·	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	0	• •	0	• •	•	•	•	•	•	• •			•																		•	• •		•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•		•	•	•
· ·	•	· · ·	20	[0	۲ 3 1) .	•	•		80)	17) 3		•	-	•	L	t (0	4	• 1 •	· ·	+	-	· ·	2	-6	• 1 • 1 • 1 • 1	•	•	י 12 ר	· ·	0	Ľiv	n i	si k)	Ł	or O	1	•	1	8	q .	7-	•	•	•	•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · ·	20		γ 3			· · I · · · · · · · · · ·			7	۳ ۱ 3	•	• • • • • • • • •		· · · ·	Ľ	+ (4	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					2	-6			• • • • • • •	کا	· · ·	0	Ľ	νi.	376	<i>ol(</i>		Ŀ	or O	1				92	7				

Claim:	Unel	N .	n 2903 —	n 803 -	n 464+	n 261 is	divisible.	by 1897
		• • •	modular			• • • • • •	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
				• • • • •				
• • • •				• • • • •			• • • • • • •	
		• • •						
• • • • •	• • • •			• • • • • •			• • • • • •	
		• • •						
• • • • •	• • • •						• • • • • • •	
		• • •						
		• • •		• • • • •			• • • • • • •	
• • • •	• • • •	• • •						

Claim: UnelN	n 2903 —	n n 803 - 464 -	r + 261 is	divisible by 1897
Proof (by				
Observe :	1897	=7X	271	prime
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
		· · · · · · · · · · · · ·		

Claim: Vn e N	n 2903 - 80	n - 464 +	n - 261 is	divisibl	e by 1897
Proof (by				· · · · · · · ·	
Observe	1097 =	= 7 ² X	271	þrime	
2903 ≡	5 (mod 7)		2903	= 193	(mod 271)
D03 =	5 (mvd 7)		D03	= 261	(mud 271)
	2 (mod 7)				(mod 271)
	2 (mod 7)		261	= 261 ((mod 271)
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · ·			

Claim: UnelN	n n 2903 - 803 -	464 + 261 is	divisible by 1897
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	modular avithin		
Observe :	1897 =	7 X 271	prime
2903 =	5 (mod 7)	2903	$= 193 \pmod{271}$
D03 =	5 (mod 7)	D03	$= 261 \pmod{271}$
	2 (mod 7)	464	= 193 (mod 271)
261 =	$2 \pmod{7}$	261 3	= 261 (mod 271)

Claim: the 1 2903 - 803 - 464 + 261 is divisible by 1897 Proof (by modular avithmetic) $= 7 \times 271$ Observe : 1897 brime $2903 \equiv 5 \pmod{7}$ $2903 \equiv 193 \pmod{271}$ $503^n \equiv 5 \pmod{7}$ $\mathfrak{D}\mathfrak{o}\mathfrak{z}^n \equiv 261 \pmod{271}$ $464 \equiv 193 \pmod{271}$ $464^n \equiv 2^n \pmod{7}$ $261 \equiv 261 \pmod{271}$ $261^n \equiv 2^n \pmod{7}$

Claim: the N 2903 - 803 - 464 + 261 is divisible by 1897 Proof (by modular avithmetic) $Observe : 1897 = 7 \times 271$ prime $2903 \equiv 5 \pmod{7}$ $2903 \equiv 193 \pmod{271}$ $\mathfrak{D}\mathfrak{03}^n \equiv 5^n \pmod{7}$ $\mathcal{D}_{03}^{n} \equiv 261^{n} \pmod{271}$ $464 \equiv 193 \pmod{271}$ $464^n \equiv 2^n \pmod{7}$ $261 \equiv 261 \pmod{271}$ $261^n \equiv 2^n \pmod{7}$ 271 | 2903 - 803 - 464 + 2617 2903 - 803 - 464 + 261

Claim: the N 2903 - 803 - 464 + 261 is divisible by 1897 Proof (by modular arithmetic) Observe: $1097 = 7 \times 271$ prime $2903 \equiv 5 \pmod{7}$ $2903 \equiv 193 \pmod{271}$ $B_{03}^n \equiv 5 \pmod{7}$ $\mathcal{D}_{03}^{n} \equiv 261^{n} \pmod{271}$ $464 \equiv 193 \pmod{271}$ $464^n \equiv 2^n \pmod{7}$ $261 \equiv 261 \pmod{271}$ $261^n \equiv 2^n \pmod{7}$ \Rightarrow 7 × 271 | 2903 - 803 - 464 + 261.

PROBLEM 1 [15 points] Identifying the application of congruence 3 pts Identifying the need for 1897 = 271 x 7 - 4 pts Correctly computing congruences -4 pts nth power of congruences -1 pts Adding congruences and finishing the proof - 3 pts

• • • •			P	ROBLE	M 2					• • •	• • •	
· · · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·				· · · · ·		• • •	· · ·	••••	
										• • •		
· · · ·		· · · · · · ·		· · · · · · · ·	· · · · · · ·		· · · · ·			· · ·	· · ·	
· · · · ·	tor	all n	7/2	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · ·	· · · ·		· · ·	· · ·	· · ·	
				· · · · · · · ·		· · · ·				• • •		
				· · · · · · ·					<u> </u>	. · · · ·	• • •	• • •
	• • • • •	\mathcal{N}	prime	\rightleftharpoons	(n)	-1)!	=	-	(moo	(m)	• • •	
· · · · ·	· · · · · ·		prime		(n -				(m00			· · · ·
 	· · · · · ·		prime		(n -	-1);						· · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		 	 			moo			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Kilson's	 	 			moo		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		 	 			mo			

	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·		(n-1) =	-1 (mod n)
Claim :	#n >2	1 2 1 1 M 1 M	prime 7		

Claim: $\forall n \ge 2$	n is prim	$e \iff (n \cdot$		≡ -1	(mod n)
			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
n = 2	(2-1)! ≡	- (mod 2) 2í (true	
	(3 −1) ! ≡		· · · · · ·		
			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
So, let's	Ass ume r	774	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	

	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·		(n-1) =	-1 (mod n)
· Claim : ·	+n 24	21 - 1 M - 1 1	prime 7		
			· · · · · · · · · · ·		
• • • • • • •					
• • • • • • •					

Claim: $\forall n \ge 4$ n is prime $\iff (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ Suppose n is prime.

Claim: $\forall n \ge 4$ n is prime $\iff (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ Suppose n is prime. \times (n-2) \times (n-1)Idea each of these has a unique inverse (mod n) in §2,3,..., n-2]

Claim: $\forall n \ge 4$ n is prime $\iff (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ Suppose n is prime. Idea: $(n-1) = 1 \times 2 \times 3 \times - - \times (n-2) \times (n-1)$ each of these has a unique inverse (mod n) in {2,3,..., n-2} $|2.3....(n-2).(n-1) \equiv n-1 \pmod{n}$ Thin , $\equiv -1 \pmod{n}$. pair up with inverces

Claim: $\forall n \ge 4$ n is prime $\iff (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ Lemma: Each $h \in \{2, 3, \dots, (n-2)\}$ has a unique invuse (mod n) in $\{2, 3, \dots, (n-2)\}$ if n is prime.

Claim :	#n 74	t n is	$prime \iff (1)$	$n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$	· ·
				a unique invuer (mod n)	
· · · · · · · · ·		in $\{2, 3,$	$-\frac{n}{2}$ if r	n is prime.	· ·
Proof of	lemma	$gcd(\mathfrak{H},\mathfrak{n})$	= => invuse	exists	· ·
· · · · · · · · · · · ·			$hh' \equiv l \pmod{n}$		· ·
· · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· ·
· · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·		• •
		· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·		

· · ·
· · ·
· ·
· ·
· ·
י רפי נייני
· ·

Claim :	tnz4	n is	prime <	$\Rightarrow (n-1)$)!≡	-1 (mod	ln)
Kemma:	Each h	€ { 2, 3,	(n-2)	-)} has a	unique	invuel (r	nod n)
) j if n is j		· · · · · · ·	
Proof of C	timma g	cd(n,n)	=	Inverse ex	ists		
· · · · · · · · · ·	₹ £,	v's.t	$hh'\equiv l(1)$	mod n)	· · · · · · · · ·		· · · · · ·
· · · · · · · · · ·	Thin, 91	(mod n)	E { 2, 3	, - · · , (n−2) is the	desired	inverse.
· · · · · · · · · ·		from	n division	theorem		· · · · · · ·	
Note :	ti (mod v	1) + 1	and n'($mod n) \neq n$	-1 ,	· · · · · · ·	

Claim: $\forall n \ge 4$ n is prime $\iff (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ Lemma: Each $h \in \{2, 3, \dots, (n-2)\}$ has a unique invuse (mod n) in $\{2, 3, \dots, (n-2)\}$ if n is prime. Proof of limina Why unique?

Claim: $\forall n \ge 4$ n is prime $\iff (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ Lemma: Each $h \in \{2, 3, \dots, (n-2)\}$ has a unique invuer (mod n) in $\{2, 3, \dots, (n-2)\}$ if n is prime. Why unique? Proof of limma If J distinct n', n'' e [1, 2, --, (n-1)] that are inverses (mod n) of h, then $h \cdot h' \equiv 1 \pmod{n}$ and $\mu \cdot \mu'' \equiv | (m \cdot d \cdot n)$ \Rightarrow $h(h-h'') \equiv 0 \pmod{n}$

Claim: $\forall n \ge 4$ n is prime $\iff (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ Lemma: Each $h \in \{2, 3, \dots, (n-2)\}$ has a unique invuer (mod n) in $\{2, 3, \dots, (n-2)\}$ if n is prime. Why unique? Proof of limina: If J distinct n', n'' e [1, 2, --, (n-1)] that are inverses (mod n) of h, then $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{h}' \equiv | \pmod{\mathfrak{n}}$ and $\mu \cdot \mu'' \equiv | (mod n)$ Not possible for \Rightarrow $h(n'-n'') \equiv 0 \pmod{n}$ prime n 🕅

Claim :	#n 74	n i	prime <=	\Rightarrow (n-1)	Ì ≡ −1	(mod n)
If r	is not	prime	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
Thin,	J q e {	2,3,,	(n-2) }	Such that	q In	· · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · ·
		· · · · · · · · · ·				
		· · · · · · · · · ·				
						· · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·

C	la	m	•	Ą	Ļγ	7	~ L	t	•	n	· · ·	2	· · ·	þ	ſv	ne	, 4		7	· ((n	· · ·	1)		· · ·			-	•	r	no	d	n ^)	•
· ·	Ţ	Ŧ	Ŷ		<u>[</u>]	 	ŕ	vot	•	þ	nìm	re	•	· ·	• •		• •	•	• •	• •	•	· ·	• •	• •	•	• •	• •		•	· ·	•	· ·	•	• •	
· ·		hiv	۰، ۱۹۰۶ ۱۹۰۶		E	q	•		2	73	, >,		, 1 1	(.	n-	-2)	Z	S	ect	م	H	nat	ŀ	q	1			•	· ·	•	• •	•	• •	•
· ·	Ś	2 2 4	1p7	G,	· ·	for		Con	tra	h 0	lic	tro	N N) -)	th	at	· ·		N)	· · · ,		· · ·	-]		ηø	L	n)		· ·	•	• •	•
	••••		· ·	•	· ·	• •	•	· ·	•	· ·	· ·											+			•	· ·	• •		•	· ·	•	· ·	•	· ·	•
	• •		•••	•	· ·	••••	•	· ·	•	· ·	• •		<u> </u>	₹	· (V		m	-1) <u> </u>	-	ł	1	· ·	•	• •	• •		•	••••	•	•••	•	••••	•
			• •		• •	• •	•	• •	•	• •	• •				• •		• •	•	• •	· ·	•	• •		• •	•	• •	• •		•	• •	•	• •	•	· ·	•
	· ·			•		• •	•	· ·	•							•	• •		• •	• •	•	· · ·			•	• •			•	• •	•		•	• •	•

Claim: $\forall n \ge 4$ n is prime $\iff (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$
If n is not prime
Thun, $\exists q \in \{2, 3, \dots, (n-2)\}$ Such that $q \mid n$.
Suppose, for contradiction, that $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$.
$\Rightarrow n (n-1) + 1$
$\Rightarrow q_1(n-1) + 1$ Contradiction
However, $g((n-1))$

PROBLEM 2 [15 points] Poiving agament for prime n ------ 8 pts lig pairing limma to prove theorem _ _____ 3 pts Proof for non-prime n _____ 4 pts

Proble	M 3	
Every doubly stochaetic mate	ix is a convex	combination
of permutation matrices.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Birkhaff - von t	Jermann Theorem	
		· · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Let A be any doubly stochaetic matrix.	
Let A be any doubly stochaetic matrix.	
Let A be any aohby stochaefic matrix.	
. J. J.	• •
	• •
	• •
	• •
	• •
	• •
	• •
	• •

Let A	be any doubly	stochaetic	matrix.
Construct	a bipartite	graph G =	(RUC, E)	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
Rows	Columns	· · · · · · · · · · · · ·		
o	P Cj	· · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·
k; °	b	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· (· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · ·
0	· • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·

	t be any a uct a bipar			
Rows	Columns	Edge (ni,	c.) exists i	f A _{ij} > 0.
hi o	р			· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	γ (· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		

Claim :	Graph G = (R	UC, E) admits	a perfect matching	• •
				· ·
				· ·
Rows	Columns			
0	p Cj	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· ·
hi o	b			• •
· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			• •
0	0			· ·

Claim:	Graph G	= (RUC, E)	admits	a perfect	matching
Proof of clai	m ! Using	Hall's theohem.			
Rows	Columns	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·
O	p Cj	· · · · · · · · · · · · · · ·
hi o	ο ο ο ο ο ο ο ο ο ο ο ο ο ο ο ο ο ο ο		· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Claim :	Graph G =	(RUC, E)	adn	nits a p	efect m	ratching
Proof of claim	m: Using Ho	ell's theohem	∧	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	
		Coneidu	any	Subject	F 2	Yows.
Rows	Columns				· · · · · · · ·	
			· · · · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·
ki o	b		· · · · · ·			
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·
0	0					

Claim:	Graph G =	(RUC, E)	admits	a perfect	matching
Proof of clai	m: Using H	all's theoper	Λ		
· · · · · · · · · · · ·		Conedu		but S	of nows.
Rows	Columns	Sum of	non Ziro	entris	₽ A
o	o Ci	achoes	all rows	entriss m S =	- [S]
hi o			· · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · ·		
0	0				

Claim :	Graph G =	(RUC, E) admits a perfect matching
Proof of clai	m: Using H	lall's theorem.
· · · · · · · · · · · · ·		Concidur any subset S of nows.
Rows	Columns	Sum of non-zero entries of A across all rows in $S = S $
o	p Cj	
hi o	b	If $ N(S) < S $, then
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Sam of nonzero entries of A across all column in $N(S) < S $
· · · · · · · · · · · · · ·		across all column in $N(S) < S $
	6	Contradiction

Claim : C	graph G =	(RUC, E) 0	idmits a pe	ufect matching	•
Proof of claim	! Using H	all's theohem.			•
		Conevour Ur	y Subfit	S of nows.	•
Rows	Columns	N(S) 7	JS[,		•
0	∕ ° Cj	⇒ Perfect	+ matchine	exDsts	•
hi o					•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				•
	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•
					•

Claim :	Graph G =	(RUC, E) admits a perfect matching
Proof of claim	n' Using H	lall's theohem. Conevolue any subject S of rows.
Rons	Columns	N(S) = S
o Ri o	o Cj	\Rightarrow Perfect matching exists
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		Permutation matrix
0	0	

Let d = smallest non zuo entry in A P = permutation matrix guaranteed by claim A' = A - dP ("peeling off" P)

Let 1 = smallest non zeux entry in A = permutation matrix guaranteed by claim $A' = A - \lambda P$ ("peeling off" P) Observe: () A has equal now and column sums 2 Hall's theorem can still be applied to A 3 # zero entries in A 7 # zero entris in A.

Let 1 = smallest non zeux entry in A P = permutation matrix guarantered by claim A' = A - AP ("peeling off" P)Observe: () A' has equal now and column sums (2) Hall's theorem can still be applied to A'
(3) # zero entries in A' > # zero entries in A The "peeling off" procedure must terminate in $\leq n^2$ steps.

PROBLEM 3 [15 poi	nts]
Construction of biportite graph	- 2 pts
Proving existence of perfect matching	5 pts
Explaining the "peeling off" procedure	
Showing that Hall's theorem still applies	2 pHs
Arguing Termination of this procedure	

PROBLEM 4 (a) Given dictinet stable matchings P, Q. If all men weakly prefer P, then all women weakly prefer Q. (b) If each man points to his more preferred partner and each woman points to her less preferred partner, then if m points at w, then w points at m (C) Show that a woman can stratigically manipulate under the men-proposing DA algorithm.

Claim	If	all	men	preakly	prefer	P thus	all wor	nen W	rearkly	brefer Q.
			• • • •					• • • •		
			• • • •							
			• • • •							
			• • • •							
				• • • • • •						

Proof: (by contraduction) Suppose woman w strictly prefus P over Q.	
	•
	•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•

Claim: If al	I men breakly	prefer P,	then all women	weakly prefer Q.
Proof: (by c	ontraduction)		· · · · · · · · · · · · · · · ·	
Suppoce	woman w st	rictly prefer	s P orn Q	
P		Q		
ω	\	m		
· · · · · · · · · · · · · ·		m	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Clair	n: If all	(men breakl	y prefer	P, thun	all women	weakly (prefer Q.
Proof	2: (by c	ontraduction)		· · · · · · · · · ·		· · · · · ·	· · · · · · · · ·
· · · · ·	Suppose	Woman W	strictly \$	meters P	DNN Q	· · · · · ·	· · · · · · · · ·
	P		Q				
	₩ <mark>♡</mark>	- m W	m				
	· · · · · · · · ·	m'	m	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · ·
	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·
· · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	 	· · · · · · · · ·

Claim	n: If (all men	weakly p.	refer P,	, this all 1	Nomen Weak	ly prefer Q.
Proo-f	; (by	contradic	tion		· · · · · · · · · · · ·		
· · · · ·	Suppor	ze homan	w stric	bly prefe	us P orn	Θ_{1}	
· · · · ·	· · · · · · · · ·	7 • • • • • • • • • • • • • • • • • • •		· · · · · · · ·	m minet	strictly	beefs
· · · · ·	W <u>&</u>	<u> </u>	W	m	Porn	•	P 7.
· · · · ·	· · · · · · ·	m'		m	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	
· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	
· · · · ·	· · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·		

Claim: If all	men weakly	prefer P, -	thin all women	weakly prefer Q
Proof: (by U	ontraduction)			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Suppose	woman w st	rictly prefers	P or Q	· · · · · · · · · · · · · · · ·
P			m must stric	thy prefu
ω	♥ m W		P over Q	
	m = m	in a statistica in the state of		
· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·		> (m, w) block	kQ.
· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	<u>1</u> 20
· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·

PROBLEM 4(a) [5 points] Identifying proof by contradiction ____ — 1 pt Identifying the consect conditions for Pand Q-3 pts Identifying the blocking poin ____ ____ 1 pt

Claim: Men	point to more	preferable	partner	between P and	
homen	Les line a les	· · · · · • • • • • •			
Thin,	if m point	s to W,	thin W	points to m.	· · · · · · ·

Claim:	Men Women Thin,	point to " if m	more preferable po Les " points to W, the	in h points to m.
				nin with different partness in P and Q.
· · · · · · ·	· · · · · ·			
 	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · ·			
· · · · · · ·	 	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Claim :	Men Women Thin,	point to " if m	more pre Les points t	ferable parts	w points to r	n.
Proof:	Only	nud te	Consider	min/womin	with different	partnus P and Q.
				$W \rightarrow m'$		

Claim :	Men Women Thin,	point to if m	more pr Lics points -	eferable "	partr Hun	w bet	ween	Pan	1 Q .	
~			o Considu							· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	Suppos	e m —	> h bu	t w-	\rightarrow m [']	· · · · · ·	· · · · ·	· · ·	· · · · · · ·	
· · · · · · · ·		· · · · · · · ·	Q	· · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · ·	· · · ·	 	
m in the second s		W	m		· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · ·	· · ·	 	• •
· · · · · · ·	· · · · · ·	m	m (· · · · · ·	· · · · · ·	 	· · ·	· · · · · · ·	· ·
				· · · · · · · ·				· · ·	· · · · · · ·	

Claim :	Men point to Women in Thun, if m	more preferable partner between P and lics """"""""""""""""""""""""""""""""""""	Q.
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		consider men/women with different par in Pa	
	Suppose m ->	w but $w \rightarrow m'$.	
 	P	$Q \rightarrow (m, w) block Q$	· · · · · · · ·
M	₩ 🕅	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·
	m	m′	
· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·		

PROBLEM 4(b) [5 points] Identifying proof by contradiction ____ -1 pt Identifying the consect conditions for Pand Q-3 pts Identifying the blocking pain -— 1 pt

Claim:	Strategic	manipulation	is possible	under DA	algorithm.
	• • • • • • •				

Claim: Strategic manipulation is possible under DA algorithm. Proof : $W_3 > W_1 > W_2$ (m) $(W_1): m_1 \neq m_2 \neq m_3$ $W_1 > W_2 > W_2 \qquad m_2$ (W_2) $M_1 > M_2 > M_3$ $W_1 \neq W_2 \neq W_3 \qquad m_3$ $(\nu_2) m_2 7 m_1 7 m_3$ DA matching for original preferences: (M1, W3), (M2, W1), (M3, W2)

Claim: Strategic manipulation is possible under DA algorithm. Proof: $(W_1): m_1 \rightarrow m_2 \qquad m_2 \rightarrow m_2 \qquad m_1 \rightarrow m_3 \rightarrow m_2$ $W_3 > W_1 > W_2$ (m) $W_1 > W_2 > W_2 \qquad m_2$ (h_2) $m_1 > m_2 > m_3$ $W_1 \neq W_2 \neq W_3 \qquad m_3$ (w_3) $m_2 > m_1 > m_3$ DA matching for original preferences: (M1, W3), (M2, W1), (M3, W2) - modified ------ (m, w1), (m2, W3), (m3, W2)

 		PRO BLEM	4(c) [5 points]	
. 	Construction of	f original and	modified instances.	— 4 pts
 	Explaining how	, the modified	instance is better -	<u> </u>
	· · · · · · · · · · · · ·	<u>.</u>		· · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			