· · · · ·	COL 202:	DIS CRETE	MATHEMATICAL	STRUCTURES
· · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · ·		LECT	rure 37	
· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · ·	CONDITI	ONAL PROBA	BILITY & PAN	23x od A
		· · · · · · · · · · · · ·		
· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·		
· · · ·	APRI	9,2024	KOHIT	V/HSH

An event is a set of outcomes. The probability that an event ECS occurs is 2 Pr (W)

MONTY HALL TREE Strategy: Switch 2 12 (1, 1, 2) L 1/18 3 1/2 1/9 3 42 12 3\_ 1/2 · 1/2 2\_ - <u>3</u> . 4 3,1,2) Vi (3,3,2) Revealed

MONTY HALL TREE Stratyy: Switch 2 1/2 (1, 1, 2) L 3 1/2 (1 3 42 12 Probability that switch 3 3 1/2 1 12 strategy losus 2 1/3 3 1/2 2\_ (2, 3, 1)41 3,1,2) 2 1/3 - (3,2) 42 1 1/2 (3,3 ให้น (3,3,2) hoice Revealed

MONTY HALL TREE Strategy: Switch 2 V2 (1, 1, 2) L 1/18 3 1/2 1/18 1/9 3 42 12 Probability that switch 3 + 1/2 1 12 strategy losus 2 13 3 % 2\_ 41 3,1,21 2 1/3 -(3,2,1)42 ให้น 3,3,21 Choice Revealed

MONTY HALL TREE Stratyy: Switch 2 V2 (1, 1, 2) L 1/18 3 1/2 1/18 1/9 3 42 13 Probability that switch 3 🛨 1/2 1 1/2 strategy losus 2 43 3 1/2 1/2 2\_ -(2,3,1) $= 6 \times L$ 41 (3,1,2) 2 1/3 <u>-</u> (3,2,1° 43 1 1/2 (3 1/mai (3,3;2) Choice Revealed

•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	· ·	 •	•	C		JL	21	Τ	0	N	A	L	•	P	R	0 B	: A	ß	311	17	Ŋ		•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	· · ·	•	•	•
															<b>.</b> .									ż				۰ <i>۲</i>														
												. [	) (	{	۰A	ŀ	n	1				- ()	) .	ſ	Δ	·Λ	6	ζ. '	<b>)</b>													
		• •			• •							·	ጉ	(	$\mathcal{H}$	- [	В	)	•			. ľ	.r.	Ĺ	r, v			• )														
		• •			• •											• •	• •	/.	•			•	• •	ີດ	۰,				•			•				• •			• •			•
		• •			• •			•				• •			•	• •			•				• •	ľн	1	B	) (		• •			•			•	• •			• •			•
•		• •			• •			•			•	• •	•		•								• •	125	(	. ,	/ .		• •							• •			• •		•	•
•		• •			• •			•	• •			• •			•	• •	•		•				• •			•			• •	•		•			•	• •		•	• •			•
•		•			•			•		•	•	• •	•						•		•	•	• •		•	•			• •		•								• •		•	•
		• •			• •				• •			• •			•	• •	•	•	•	• •			• •			•				•		•			•	• •		•	• •			•
		• •			•				• •			• •			•	• •	•		•	• •		•	• •						• •	•		•			•	• •		•	• •			•
		• •		•	• •	•									•	• •		•					• •												•							1
		• •			• •											• •										•																
		• •			• •							• •				• •			•				• •			•						•				• •			• •			
		• •			• •			•				• •			•	• •			•				• •			•			• •			•			•	• •			• •			•
•		• •			• •			•			•	• •	•		•								• •		•	•			• •							• •			• •		•	•
•		• •			• •			•	• •	•		• •	•		•	• •	•	•	•		•		• •			•			•	•		•			•	• •		•	• •			•
	٠	•		•	•	•		•	• •			• •			•	• •	•			• •			• •			•			•	•			• •	•	•	• •			•			
		•			•			•	• •			• •			•	• •		•	•	•			•			•			•			•	•		•	• •			•			
		• •			• •				• •			• •				• •			•	• •			• •			•			• •			•				• •			• •			
																				• •													• •									

CONDITIONAL PROBABILITY Pr (A|B) Pr (A n B) Ξ Pr(B) - sample space S

•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	· · ·	•	•	•		0	<b>N</b> 1	DI	Τ	10	N	IĄ	L	•	P	R	0 B		B		11	Y	•	· · ·	•	•	· · ·		•	•	•	· · ·	•	•	•
• • • •	· · ·		•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	P		, (	F [	B	) ) ) 1	· · ·	-			h	( Pr	A 	∩ ₿	B (}	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	-	•	· · ·	•	• • • •	· · ·		• • • • •	•	•	· · ·	•		
	Ph	o d	n Mic	↓ ↓ ↓	, , ,	Lin Lin	le	· · ·		•	•	P P	r hi	(	+ [	l l	ß	)	Ņ		•	Pr	(	B	)	· ·	P	r r	(f		B	) )	•	• •		•	•	•	· ·	•	•	•
	•	• •			• •	•	•	• •	•		•	• •	•	• •	•	•		•					• •			• •	•	• •	•		• •	٠	۰			•	•	•			•	•
•														• •												• •		• •											• •		•	
-		• •		•	• •		•	• •				• •	•	• •		•		•	•		•	•	• •			• •		• •			• •			•	•			•	• •		•	•
-		• •		•	• •			• •	•	•	•	• •		• •		•			•			•	• •			• •		• •		•	• •			•				•	• •			*
-		• •		•	• •		•	• •		•			•	• •				•			•	•	• •	•		• •	•	• •		•	• •						•	•	• •			
•																																										
																										• •															•	
					• •			• •			•	• •		• •	•				•	-			• •			• •		• •			• •			•				•	• •		•	
•		• •		•	• •		•	• •	•		•	• •	•	• •		•		•	•	-		•	• •			• •		• •		•	• •			•				•	• •		•	

CONDITIONAL PROBABILITY  $P_{r}(A|B) = P_{r}(A\cap B)$ Pr(B) Product rule  $Pr(A \cap B) = Pr(B) \cdot Pr(A \mid B)$ General Product nule  $Pn(A_1 \cap A_2 \cap - \cap A_n) = Pn(A_1) \cdot Pn(A_2 \mid A_1)$  $P_{\mathcal{X}}(A_3|A_1 \cap A_2).$  $P_{\mathcal{X}}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$ 

· ·	•	• •	• •	•	· ·	•	•	•	· ·	•		Be	23	T	•	2.	- 0	) ) (	T	- 0 - 0	)F		3	•	S	E	r F-1	E	5	· ·	•	••••	•	•	•	•••	•	•	• •	•	•
· · ·	•	2	· · ·	t		m		•	Þ	10	ry J	•	4	 	Ľ	· ·	gi	5-N	W		•	· · ·	•	•	· · ·		•		•	· ·	•	· · ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•
· ·	•	Ĥ	ጉ <u>ያ</u>	t	· · ·	to	•		ร่	n	•	tı	~~(	, .		fa	m	s	· · ·	5	5i	ns	•	H	بر		Se	s)	હ	· ·	•	· · ·	•	•	•	· ·	•	•		•	•
• •	•		• •	•	• •	•	0	•	••••	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •		•		•	• •	•	• •	•	•	•	•••	•	•	• •	•	•
· ·	•		••••	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	•••	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	• •	•	•	· ·	•	•	•	•	••••	•	• •	•	•	•	• •	•	•		•	•
• •	•	• •	• •	•	• •	•	•	•	••••	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •		•		•	• •	•	• •	•	•	•	• •	•	•		•	•
· ·	•		•••	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	•	•	••••	•	•	· ·		•		•	· ·	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	•••	•	•
• •	0		• •	•	• •	•	0	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •				•	• •	•	• •	•	•	•	• •	•	•		•	•
· ·	•	•	• •	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·		•	• •	•	•	· ·		•		•	· ·	•	• •	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•

BEST 2-OUT-OF-3 SERIES	
2 trams play three games	
First to win two games wins the series	
For any team:	
* Prob of winning the I game = 22.	
* Prib of winning a game after a win	$= \frac{2}{3}$
* Prob of winning a game after a lors	= 1/2

BEST 2-OUT-OF-3 SERIES Game 1 Game 2 Game 3 W W 1/3 W W. "

BEST 2-OUT-OF-3 SERIES Game 1 Game 2 Game 3 (1/3) WW W (18)W W. -WW(1/q)W (8)  $\frac{1}{3}$ 

BEST 2-OUT-OF-3 SERIES Pr (winning the series | won first game) = ?

BEST 2-OUT-OF-3 SEALES (winning the series | won first game) = Pr  $Pr(A|B) = Pr(A \cap B) =$ 

BEST 2-OUT-OF-3 SEALES win jst win Series B Game 1 Game 2 Game 3 (1/3) WW W W W WW(1/g) W 1.81 1/2

BEST 2-OUT-OF-3 SERIES win 1st win / Series Game 1 Game 2 Gami 3 (1/3) WW W W 43 W -WW (1/g) W(10) $P_{h}(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18}$ 3  $P_{h}(A \land B) = -$ 2 + +  $P_{\mathcal{N}}(A|B) = 7$ 

BEST 2-OUT-OF-3 SEALES Pr (winning the series | won first game) = 7/9 Pr ( won first game | winning the series ) = ?

BEST 2-OUT-OF-3 SEALES Pr (winning the series | won first game) = 7/9 Pr ( won first game | winning the series ) = ? Carlier in time later in time

BEST 2-OUT-OF-3 SEALES Pr (winning the series | won first game) = 7/9 Pr ( won first game | winning the series ) = ?  $Pr(B|A) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(A)}$ 

BEST 2-OUT-OF-3 SEALES win jst win Series B Game 1 Game 2 Game 3 (1/3) WW W W W WW(1/g) W 1.81 1/2

BEST 2-OUT-OF-3 SEALES win 1st win Series ANB Game 1 Game 2 Game 3 (1/3) WW W W W  $\left( \frac{1}{2} \right)$ WW W $V_{3}$   $P_{n}(A \cap B) = V_{3} + V_{18}$ Pr (A) Via + 1/9 = 1/3 +

BEST 2-OUT-OF-3 SEALES Pr (winning the series | won first game) = 7/9 Pr ( won first game | winning the series ) = 7/9

BEST 2-OUT-OF-3 SERIES Pr (winning the series | won first game) = 7/9 Pr ( won first game | winning the series ) = 7/qIn general, Pr (ALB) \$ Pr (BLA). 

			• •		• •				• •			• •		• •								• •							• •					
										E	<b>.</b>		•				•		· A ·															
										T	H	K	h	NĮ	7.	٠V		IF	H	IK	 . (	J	I	12										
			• •						• •					• •								• •				• •					• •			
			• •						• •					• •								• •				• •					• •			
			• •											• •								• •				• •					• •			
			• •					•	• •			• •				• •						• •				• •					• •			
			• •					•	• •			• •		• •		• •			• •			• •									• •			
			• •		• •			•	• •			• •		• •		• •						• •				• •					• •			
			• •		• •			•	• •			• •		• •		• •						• •				• •					• •			
			• •		• •			•	• •			• •		• •		• •						• •				• •					• •			
			• •		• •			•	• •			• •		• •		• •			• •			• •				• •				•	• •			
			• •		• •			•	• •			• •		• •		• •			• •			• •				• •				•	• •			
			• •		• •				• •	•		• •		• •		• •			• •			• •		•		• •					• •			
			• •		• •				• •	•		• •		• •		• •			• •			• •		•		• •					• •			
			• •		• •			•	• •	•		• •		• •		• •			• •			• •		•		• •					• •			•
			• •		• •			•	• •	•		• •		• •		• •			• •			• •		•		• •					• •			•
	•	•	• •		• •			•	• •			• •		• •		• •			• •			• •		•		• •		•	• •	•	• •		•	•
	•	•	• •		• •			•	• •			• •		• •		• •			• •			• •		•		• •		•	• •	•	• •		•	•
•	•		• •		• •			•	• •			• •	•	• •		• •		•	• •		•	• •		•		• •			• •		• •		•	•
	•	•	• •		• •			•	• •			• •		• •		• •			• •			• •		•		• •		•	• •	•	• •		•	•
			• •		• •			•	• •	•		• •		• •		• •			• •			• •		•		• •					• •			•
			• •		• •			•	• •	•		• •		• •		• •			• •			• •		•		• •					• •			•
		•	• •		• •			•	• •			• •		• •		• •			• •			• •		•		• •					• •	۰.		•
	•	•	• •	•	• •				• •			• •		• •		•			•			• •		•		• •					• •		•	
		•	• •		• •			•	• •			• •		• •		• •			• •			• •		•		• •					• •			•

· ·	· · · · · · · · · · · · · ·	FAIR AND	UNFAIR	2410)		
· · ·	Coin 1 :	507. H,	507. T			
· ·	Coin 2	1007. H	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	
• •	· · · · · · · · · · · · · · ·					
· ·	· · · · · · · · · · · · · · ·					
· ·	· · · · · · · · · · · · · · ·					
· ·	· · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·
• •	· ·			· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · ·					

· ·	•		· · · · ·	F	AIR	AND	UNFAI	r Co	2410	· · · · · ·	· · ·	· · ·	· · · · · · ·
· ·	•	Coin 1	· · · · ·	507.	Н	· · · · · ·	507.		· · · · ·		· · · ·	· · · ·	· · · · · · ·
· ·	•	Coin 2	· · · · ·	100	7. H	· · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · ·	· · ·	· · · · · · ·
• •	•	Suppose	Q	Coin	ÌS	chose	n unifi	rmly	at	random		· · ·	· · · · · · ·
	•												
• •													
• •	•												
• •	•			• • • •		• • • •		• • • •			• • •	• • •	
• •	•				• • • •	• • • •		• • • •			• • •	• • •	
													•

	•	· ·	· ·	• •	•	• •	•	• •	•	FI	41	R	<b>P</b>	HN	D	U		IF	A	R	(	<b>`</b> 9	1 N	2	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•
	•	Co	ΪN.	1	•	· · ·	•	5	0	7.	· · ·	H	· · ·	•	,	• •	5'	0	1 1 10		•	· ·	· · ·	•	· · ·	•	•	· ·	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	
•	•		Ín	2	•	•••••	•		0 0 0	, <b>1</b> 7	/ 1	H	· ·	•	• •	•		•	• • • •	· ·	•	· ·	· ·	•	• •	•	•	• •	•	••••	•	•	• •	•	• •	•
	•	Su	٩þ٥	se	•	Q	•	Co	ir	۱.	Ì	۲ ۲	C	ho	Sc	M		lin	if	~m	hy		at	•	10	nd	01		•	••••	•	•	• •	•	• •	•
	•	Wh	m	+	his	• •	Co	in	•	2		10	sse	d'; ;	· ·	Sa (		į	ł	8	ho	י אר י	• •	Н	•••	0	•	• •	•	• •	0		• •	•	• •	•
•	•	· ·	• •	• •	•	• •	•	• •	•	•	••••	•	· ·	•	•••			•	• •	• •	•	• •	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•
	•	· · ·	· ·	••••	•	••••	•	••••	•	•	••••	•	· ·	•	· ·	• •	•	•	· ·	•••	•	• •	• •	•	· ·	•	•	· ·	•		•	•	• •	•	• •	•
			• •												• •	•					•					•	•	•••						•		•
•	•	• •	• •		•	• •	•		•	•	· ·	•	0 0 0 0		• •				• •										•	• •						
	•	· · ·	· · ·	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	•	· · ·	•	· · ·	•	· ·			•	· ·	· · ·	•	· ·		•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	•	•	· ·	•	• •	•

	· · ·	· · ·	Fa		AND	UN	IFAIR	COIN	2	· · · · ·	· · ·	• •	• •	· · ·
Coin	1 :	5	-0 7.	Н	· · · · · ·	5	07. T	· · · · ·	· · · · ·	· · · · ·		· ·	· ·	· · · ·
Coin	2 :		007.	Н	· · · · ·	· · · ·	· · · · · ·	· · · · ·	· · · · ·			· ·	• •	· · · ·
Subbos	  	λ <sup>1</sup> · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	nn	Ì C	chos	in in i	uniform	ly at	704	ndom	· · · ·	• •	· ·	· · ·
TP				1				/						
When	this	Coin	٦ĵ	+ 55	ied,	Say	it s	() shows	H.	  	· · · ·	· ·	· ·	· · · ·
When What	this is	Coin the	2í ord	toss babul	ied,	Say that	it s we	() shows bicked	H He	fair	, Ca	in a second seco	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
- Tpro When What	this is	Coin	2í org	to ss babul	ied,	Say	it s we	hows bicked	H He	fair	, Ca	i i i i i i i i i i i i i i i i i i i	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
- TPro When What	this is	Coin	2í m	to ss babul	id,	Say	it s we	hows bicked	H He	fair	, Ca	p m (	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

FAIR AND UNFAIR COINS
Coin 1 : 507. H, 507. T
Coin 2: 1007, H Suppose a coin is chosen uniformly at random.
When this coin is tossed, say it shows H.
What is the probability that we picked the fair coin?
Similarity with Monty Hall: Prob that car is behind door #3 given that dour #1 chosin and door #2 neverled?

•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	ł	7	+1	R	-	ŀ	4	1 <b>C</b>	) ) )		J	N	F	A	1		•		0	IP	21	· ·	•	•	•	•	•	••••		•	•	•	•			•
•	•		•	•		•	•	•	•	•	•		•	•					•	•	•	•	•	•	•	•				•	•	•	•			•	•	•	•	•			•	•	•	•			•
•	•	1	•	•	T	no	h	)	+	h	Ĺ	t	<u>,</u>	u					•	•	•	•	•	•	•	•				•	•	•	•			•	•	•	•	•			•	•	•				•
			•		• •					•	•	•													•	•			• •					•				•	•	•		-		•		•	• •		•
•	•	•	•	•	• •			•		•	•	•	•	•	•	•	•			•	•		•	•	•	•	•						•	•				•		•	• •			•		•	• •	•	•
•	•	•	•	•	• •			•	•	•	•	•	•		•	•	•			•	•		•	•	•	•		•	• •					•			•			•	• •				•	•	• •		
																															•		•																
		•		•	• •			•	•	•	•		•	•						•	•				•	•			• •		٠						•			•		-		•		•	• •		
•	•	•	•	•	• •			•		•	•	•	•		•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•		• •	•	•		•	•	• •	•		•	•	•	• •		•	•			• •		
•		•		•	• •			•	•	•	•	•	•		•								•		•	•	•	• •	• •										•	•	• •		•			•	•		
					• •																																									•			
•		•	•		• •					•	•	•	•	•	•	•					•		•	•	•	•	•		• •				•	•	• •					•	• •			•		•	• •		•
		•	•	•	• •			•	•	•	•	•			•					•		•			•	•	•				•		•	•	• •				•	•	• •				•	•	• •		
•		•	•	•	• •	•				•	•		•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•				•	• •		•			•	• •		•			•	• •		
•		•			• •	•				•	•		•		•	•	•				•		•	•	•			•	• •					•												•	• •		

· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	FAIR	AND	UNFAIR	COINS	· · · · · · ·	
 	· · · · · · · · · · · ·						
1	. Draw the	tru				· · · · · · ·	
• • •	Cai						
• • •	Um						
	fair						
0 0 0							
	unfau						
0 0 0							
• • •							
• • •							
						· · · · · · ·	
• • •							

	FAIR	AND	UNFAIR	2410)	· · ·	· · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					• • •		
I. Draw the la	u						
Coin Plip							
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · ·		• • •		· · · · · · · · ·
fair			· · · · · · · · ·		• • •		
unfair -							
			· · · · · · · · ·		• • •		· · · · · · · · ·
			· · · · · · · ·		• • •		· · · · · · · · ·

	FAIR	AND	UNFAIR	2410)	· · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·
$= \frac{1}{2} + $	 	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	
L. Draw The D						· · · · ·		
					· · ·			
taur	- · · · · · ·					· · · · ·		
unfair	· · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	• • •	· · · · ·	· · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	


FAIR AND UNFAIR COINS 1. Draw the tru Coin Plip Yn. fair 1/2 . Н. unfair 1/2

FAIR AND UNFAIR COINS 1. Draw the tru Coin Plip 1/2 H(1/4) (14) fair 1/2 Unfair 1/2  $(l_{1})^{1}$ 

FAIR AND UNFAIR COINS 1. Draw the tru Coin Plip 1/2 H(1/4) fair 1/2 r (14) unfair  $\frac{H}{1}$  H ( $\frac{U}{2}$ ) 2. Define events of interest

FAIR AND UNFAIR COINS 1. Draw the tru Coin Plip  $V_2$  H( $V_4$ )  $\overline{T}$   $\frac{V_2}{T}$   $(V_4)$ fair 1/2 unfair  $\frac{H}{\sqrt{1}}$  H ( $l_{2}$ ) 2. Define events of interest A = choose fair coin B = result is H

FAIR AND UNFAIR COINS 1. Draw the tru Coin Plip  $V_2$  H( $V_4$ )  $\overline{T}$   $\frac{V_2}{T}$   $(V_4)$ fair 1/2 unfair  $\frac{H}{\sqrt{1}}$  H ( $l_{2}$ ) 2. Define events of interest A = choose fair coin B = result is H

FAIR AND	D UNFAIR	COIN	2	
1. Draw the true Coin Plip H 2 H(1/4)	$\mathcal{A}$	B	AN B	
fair $\frac{1/2}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$				
2. Define events of interest A = choose foir coin B = pesult is H	<th>·         ·</th> <th></th> <th></th>	·         ·		

FAIR AND	UNFAIR COINS
1. Draw the true Coin Flip 1/2 H(1/4)	A B ANB V V
fair $\frac{1/2}{1} \xrightarrow{T} \frac{1}{2} T \left( \frac{1}{4} \right)$ unfair $\frac{1}{2} \xrightarrow{H} H \left( \frac{1}{2} \right)$	
2. Define events of interest A = choose foir coin B = result is H	3. Analyze the probability

FAIR AND UNFAIR COINS 1. Draw the tru Coin Plip A = A(1 B) $H \stackrel{V_2}{\longrightarrow} H (V_4)$ fair 1/2 T (1/4) Infair  $\frac{H}{1}$  H ( $l_{2}$ ) 2. Define events of interest 3. Analyze the probability A = choose fair coin  $P_n(A|B) = P_n(A\cap B)$ B = present is H Pr (B)

FAIR AND UNFAIR COINS 1. Draw the tru Coin Plip  $A \cap A(1 \cap B)$ H = H(1/4)fair 1/2 T (1/4)  $hnfair \frac{H}{1} H (U_2)$ 3. Analyze the probability 2. Define events of interest A = choose fair coin  $P_{h}(A|B) = \frac{P_{h}(A\cap B)}{P_{h}(B)} = \frac{1/4}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ B = pesmit is H

								•		• •																													• •										
															C	•			•	Λ.											C.	<b>.</b>	i n B	C															
															<b>F</b>	H	IK	-		T	N.	V.		V	N	F	H	11	ς.		U	ע	<b>N</b>	2					• •			•			•				
•					•	•	•	•		• •					•	•	•		• •										• •				• •				•		• •	•			•		•	• •	• •		•
				•											•	•	•		• •										• •				• •				•		• •	•					•	• •	• •		•
				•	•		•								•	•	•		• •										• •			•	• •				•	•	• •		•				•	• •	• •		•
•		•		•	•	•	•	•		• •			•		•	•	•		• •	-								•	• •	•		•	• •	•	•		•		• •	•				•	•	• •	• •	•	•
	•			•		•										•	•		• •										• •			•	• •				•	•	• •						•	• •			
•		•	•	•	•	•	•	•		• •			•	•			•		• •					•				•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•		• •	•				•	•	•	•		
				•		•		•		• •						•	•		• •										• •				• •					•	• •						•	• •			
•					•	•	•		•	• •						•	•		• •									•	• •		•	•	• •	•		•	•		• •						•	• •	•		•
		•			•	•	•	•		Ì		, ·	, <sup>.</sup>		1		•		• •						<b></b>	•		•	• •		•	•	•	•		È			• •						•	•	•		
•				•	•		•		•		NI	NÒ	t		N	oil	رمام	PAn	0. 0		W	hi	۸۸		+	ん	Ľ	÷ (	ות'	ìn,	3	â	Μ,		C	n	02	W	۱.						•	• •			
					•	•	•						•			` ¥	T	vru	<u>م</u>		•		- <b>.</b> . L														•	•	• •							• •			
																	•		• •										• •							•	•		• •							• •			
																																		•															
																	1							- 1			Ĺ.	_	1.	I.	a İ	2)		<u> </u>	)														
															h	21	Th		U	ΛV	ſŧ	9	N	a	-		67	1	10	nb	N V	ηŢ	7					-											
																											ſ						U.	1															
																																						•											
																													• •											•					•	• •			
										• •					•	•	•		• •										• •										• •						•	• •	• •		•
					•	•		•		• •			•			•	•		• •										• •			•	• •	•			•		• •	•					•	• •	• •		•
					•	•		•		• •			•			•	•		• •										• •			•	• •	•			•		• •	•					•	• •	• •		•
				•											•	•	•		• •										• •				• •				•		• •	•					•	• •	• •		
			•		•	•	•	•		• •						•	•	•	• •							•		•	• •				• •				•	•	• •	•					•	• •			•
•		•			•	•	•	•	•	• •			•			•		•	• •						•	•	•	•	•		•	•	•	•		•	•		• •	•	•				•	•	•		
•	•				•	•	•	•	•	• •						•			• •										• •				•				•	•	• •	•						• •			•

FAIR AND	UNFAIR COINS
1. Draw the true Coin Plip H H T 1/2 T	A B ANB V V
Unfair H	
2. Define events of interest A = choose foir coin B = result is H	3. Analyze the probability $P_n(A B) = \frac{P_n(A \cap B)}{P_n(B)}$

FAIR AND	UNFAIR COINS
1. Draw the true Coin Flip H H	A B ANB V V V
fair P 12 T Unfair I-p 1 H	
2. Define events of interest A = choose foir coin B = result is H	3. Analyze the probability $P_{h}(A B) = \frac{P_{h}(A\cap B)}{P_{h}(B)}$

FAIR AND	UNFAIR COINS
1. Draw the true Coin Flip H	A B ANB V V
fair $P = \frac{T V_2}{T (P/2)}$ unfair $\frac{H}{1-p} = 1$ $H (1-p)$	
2. Define events of interest A = choose foir coin B = result is H	3. Analyze the probability $Pn(A B) = \frac{Pn(AnB)}{Pn(B)}$

FAIR AND	UNFAIR	2410)
1. Draw the true Coin Flip 1/2 H (P/2) H	A E	BANB
fair $p = \frac{T V_2}{T (P/2)}$ unfair $\frac{H}{1-p} = \frac{1}{T} H (1-p)$		
2. Define events of interest A = choose foir coin B = result is H	<b>3</b> . Pr (Alb	Analyze the probability $ \int = \frac{P_{n}(A \cap B)}{P_{n}(B)} = \frac{P/2}{P_{2} + 1 - p} = \frac{P}{2 - p} $

•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	F	4	R			A	N	D	•	U	, N	JF	A	H H	L	•	<b>C</b>	9	) <b>(</b>	n.	2	•	•	••••	•	0	•	•	•	•	• •	0	•	•	•	•
•					•	• •					•					•		•	•											•													•							
					<u> </u>	<u>م</u> .															<b>,</b> .						<u>م</u> .																							
						ť.	- 1	٨٧	n - 1	) a	15		-(	ົ	1:00			ÌS			Ь	ĴС	k	e d		_	HA	<u>к</u> . –	. 5	211	Ы																			
									<u>`.</u> ]						vr.	•			-				•			- 1	) .	č																						
																																												•		•			•	
				•										•	•	•	•		•								•		•	•	•	• •										•		•	• •	•	•		•	•
•	•	•		•									•	•	•	•	•		•									•		•	•	• •		•								•	•	•	• •	•			•	•
		•			•				•	•			•	•	•	•	•	•	•						•	•		•	•	•	•	• •		•	•		•	• •					•	•	• •				•	•
•	•	•							•	•			•	•	•	•	•	•	•	•				•	•	•		•	•	•	•	• •		•	•		•	• •			•		•		• •	•			•	•
		•														•	•			•											•	• •					•						•						•	
																															•																		•	
		•			•									•	•	•	•		•										•	•	•	• •											•	•		•			•	
	•	•		•	•	• •						•		•	•	•	•	•	•						•					•	•	• •					•					•	•	•	• •	•		•	•	•
•	•	•			•	• •								•	•	•	•	•	•					•					•	•	•	• •						• •				•	•	•	• •			•	•	•
•	•				•	• •								•	•	•	•	•	•	•										•		• •						• •					•	•	• •				•	•
		•		•	•									•	•					•											•	• •												•	• •				•	•
		•														•	•		•											•	•	• •					•						•						•	

FAIR AND UNFAIR COINS If unfair coin is picked for swe b = 0=> Pr (-fair coin ( seent is H) =

FAIR AND UNFAIR COINS If unfair coin is picked for swe  $\Rightarrow$  p=0 $= \operatorname{Pr}\left(\operatorname{fair \operatorname{coin}}\left(\operatorname{seenth} \operatorname{is} H\right) = \frac{0}{2-0} =$ If fair coin is picked for swe  $\Rightarrow p = 1$  $\Rightarrow$   $\Pr(\text{fair coin} | \text{sendt is H}) = \frac{1}{2-1} =$ 

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	P	A	1	R	-		A	N	D	)		U	N	F	÷A	H	R			C	D	ľŗ		2	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•		1	Je	Jh	).	•	Ì	ſſ	10	g	Ir	V	· · · ·	•	+	ћ	L		С	0		•	•	2 Í	· · ·	•	1	Ľ	ì]	, þ	ų	l L	•	•			)	•	fi	, 1	e L	٨	;,	,	•	a	M	d	•	•	•	•	
•	0	•	•	•	•	i L	t	•		6	1 M	J	, ,		•	-  - 		0	•	1 1	V	lr.	y	•	ł	) jr	2	د و ر	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•					•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•				•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•				•	•	•	•	•			•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			• •
•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•				•	•	•	•		•			•		•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•				•	•	•	•	•			•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•				0		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
	•			•	•			0		•					•			•					0			•	0	•	0	0	•		•	•		•	0	•			0				0	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•	

FAIR AND	UNFAIR COINS
1. Draw the tru Coin Flip H	A B ANB V V
fair P T 12 Unfair 1-p 1	
2. Define events of interest A = choose foir coin B = result is H	3. Analyze the probability $Pn(A B) = \frac{Pn(AnB)}{Pn(B)} = \frac{Pn(B)}{Pn(B)}$

FAIR AND	UNFAIR COINS
1. Draw the tru Coin Plip	A B ANB V V V
fair P Not 100 H Unfair 1-10 1	
2. Define events of interest A = choose foir coin	3. Analyze the probability $P_{L}(A B) = P_{L}(A\cap B) =$
B = pesult is H	$\frac{1}{R_{\rm h}(B)} = \frac{1}{R_{\rm h}(B)}$

FAIR AND	UNFAIR COINS	• •
1. Draw the tru Coin Flip	A B ANB V V V	
fair P Not 100 H Unfair 1-p 1		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
2. Define events of interest A = choose foir coin B = result is H	3. Analyze the probability $P_n(A B) = \frac{P_n(A \cap B)}{P_n(B)} = \frac{P_n(B)}{P_n(B)}$	

FAIR AND	UNFAIR COINS
1. Draw the true Coin $Flip$ $\frac{1}{12}$ $p(\frac{1}{2})^{n}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}$	A B ANB V V V
unfair 1-p 1 [-p	
2. Define events of interest A = choose foir coin B = result is H	3. Analyze the probability $P_n(A B) = \frac{P_n(A\cap B)}{P_n(B)} =$

FAIR AND	UNFAIR COINS
1. Draw the true Coin Plip $\frac{1}{2}$ $p \cdot (\frac{1}{2})^{r}$ $\frac{1}{2}$ $p \cdot (\frac{1}{2})^{r}$ fair $p \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{r}}{100 \text{ H}} p \left(1-(\frac{1}{2})^{r}\right)$	A B ANB V V
unfair 1-p 1 (-p	
2. Define events of interest A = choose foir coin B = result is H	3. Analyze the probability $Pn(A B) = \frac{Pn(AnB)}{Pn(B)} = \frac{Pn(B)}{Pn(B)}$

FAIR AND UNFAIR COINS 1. Draw the tru Coin Plip  $\frac{1}{2}$   $p(\frac{1}{2})^{n}$   $\frac{1}{2}$   $p(\frac{1}{2})^{n}$ fair  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$   $p(1-(\frac{1}{2})^{n})$   $\frac{1}{2}$ Unfair 1-10 1 (-p 3. Analyze the probability 2. Define events of interest A = choose fair coin  $P_n(A|B) = P_n(A\cap B) =$ B = pesult is H, H, ..., H Pr (B)

FAIR AND UNFAIR COINS 1. Draw the true Coin Plip  $\frac{1}{100 \text{ H}} \frac{1}{100 \text{ H}}$ Unfair 1-10 1 [-p 2. Define events of interest 3. Analyze the probability A = choose fair coin  $P_{n}(A|B) = \frac{P_{n}(A\cap B)}{P_{n}(B)} = \frac{P}{P + 2^{low}(I-P)}$ B = pesult is H, H, ..., H

•	•	•	•	•	•	•		• •					•	F	A	I P		•	A	N	D		U		١F	A	1	٢		C	D (	Ŋ	2	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	
•	•	•	· ·	1		) N	).	ì	η	70	A B	În	L		+	h	•	, , ,	ا مر' مرز	i În	• •	Ì	2	•	Ŧ	'li	þ	þ×	d			0	0		fi.		د لک د		, , ,	•	a a	n N-c	L				•	
•	•	•	· · ·	•	Ľ	ł	•	l	), v	J	ر ۲		ł	1	•		2 2∕∕	۲ ۲	y	•	ti	m	و و		•	•	•	· ·	•	•	•	· · ·	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	
•	•	•	· · ·	•	•	•	•	• •	· ·	•			•	W	k	at	•	•	2	-	H	٦٤	•	n V V	10	lu	e	· ·	of		þ	• •	۲. ۲.	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	• •	•	•	
•	•	•	· ·	•	•	•	•	· · ·	· ·	•			•	•	•	•	•	•	•	•	• • • •	· ·	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·		•	•	
•	•	•	• •	•	•	•	•	· ·	· ·	•				•	•	•	•	•	•	•	• •	· ·	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	
•	•	•	• •	•	•	•	•	· ·	· ·				•	•	•	•	•	•	•	•	• •	· ·	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	· · ·	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	
•	•		· ·		•	•	•	· ·					•	•	•	•	•	•		•				•	•	•	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	· ·		•	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	

FAIR AND UNFAIR COINS Now imagine the coin is flipped 100 times, and it lande H every time Pri(fair coin sernet is H, H, ---, H)  $p + 2^{loo}(l-p)$ 100 times

· · ·	•	· · ·	•	· · ·	· ·	••••	• •	•	F	AI	R	A	ND	U		-A-1	R	6	143	2	· · · ·		· · · ·	· •	· · ·	· · · ·	
· ·	•	· ·	1∖ 2	Jon	· · · · · · ). ·	Ìm	1ag	in	· ·	+h	L	Co Co	in i	2 (		flip	pro	 L	] 0 0	, , , , , , , , ,	tim	us a	, 0	ind	L	· · ·	
· · ·	•	· · ·	•	ilt N	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	lar	L	•	Н	· · ·	e V (	ery	ti	ne	• •	· · ·	· · ·	· · · ·	· · ·	· · ·	· · · ·	· · ·	· · · ·	· · ·	· · · ·	· · · ·	•
· ·	•	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	Rr	2 	fai	  	loin				îc			· · · ·		· · ·		· ·	þ		· · · ·	· · · ·	•
· ·	•	· · ·	•	· · ·	· · ·	· · ·				· · ·	· · · ·				1.5	(10	v v +	· imus		· · ·	· · · ·	þ H	+ 2	00(	-þ)	· · · ·	•
· · ·	•	· · ·	•	· ·	· ·	· · ·	• •	•	· · ·	• •	· · · ·	•	· · · ·		· ·	· ·	· ·	· · · ·	· ·	~	$\mathbb{O}$	4	then	þ	= 0,0	1999	
			•													0 0											

	Fair	AND UNFAIL	e coins	
Now	imagine the	coin is flip	prd 100 ti	mes, and
U.	lande H evi	ery time		·       ·
<th>Pr (-fair coin</th> <th><math>\int Parntt is H, H</math></th> <th>(,, H) = v times</th> <th><math display="block">\frac{\beta}{\beta + 2^{100}(l-\beta)}</math></th>	Pr (-fair coin	$\int Parntt is H, H$	(,, H) = v times	$\frac{\beta}{\beta + 2^{100}(l-\beta)}$
either very c	onfident that th OR	e com has unfair		0 when $p = 0.9999$
really un	incky with ow	, experiment	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	1 when $p=1$

FAIR AND UNFAIR COIN	21
Now imagine the coin is flipped 10	o times, and
it lande H every time.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Pr (-fair coin   soundt is H, H,, H	$) = \frac{p}{1 + 100}$
Same as election polls! 100 times	$p + 2^{-}(l-p)$
either very confident that the com was unfair OR	$\approx$ O when $p = 0.9999$
really unlucky with our experiment	= 1 when $p=1$

			• •		*	• •			• •			• •							• •			• •			•		• •		•			• •		• •		
																	. •																			
												E	D	16	<b>`</b> A	1.			E.	G.	ΤI	. N	6													
											. '		-					.*	<u> </u>	<b>-</b> .	L L		• 4													
																								•												
								•																												
									• •	•		• •		•						•	•			•	• •		• •					• •				
			• •						• •			• •		•	• •						•	• •		•	• •		• •		• •			• •		• •		
					•				•			• •									•			•	• •		• •		• •			• •		• •		•
		•			•				•			• •						•	• •			• •			• •		• •		• •		•	• •	•	• •	•	•
			• •		•	• •			• •			• •			• •			•	• •			• •			• •		• •		• •		•	• •		• •		
			• •		•	• •			• •			• •			• •				• •			• •			• •		• •		• •			• •		• •		
																																• •		• •		
								•																			• •									
			• •			• •			• •	•		• •	•	•	• •			•		•	•	• •				•	• •			•		• •				
			• •			• •	•		• •			• •			• •			•	• •			• •					• •					• •		• •		
			• •		•	• •			• •			• •			• •			•	• •			• •			• •		• •		• •		•	• •		• •	•	•
	•		• •		•	• •	•		•			• •	•	•	• •			•	• •			• •			• •		• •		• •			• •		• •		•
		•			•				•			• •						•	• •			• •			• •		• •		• •		•	• •	•	• •	•	•
			• •		•	• •			• •			• •			• •			•	• •			• •			• •		• •		• •		•	• •		• •		
			• •		•	• •			• •			• •			• •				• •			• •			• •		• •		• •			• •		• •		
																																• •		• •		

•	•	•	• •	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	· ·	N		E I		с. С.	A	L		Te	ēs	37	<b>FI</b>	N	G	• •	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	· ·	•	•
•	•	•	• •	10	7	· ·		of	• •	+1	he	•	þ	o þ	n N N	la.	⊦i₁	5 0 0 1 0		r h		5	-	r Hh	e e	0	lis		26	e	· ·	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•
•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	••••	•	•	•	••••••••••••••••••••••••••••••••••••••		•	•	••••	•	•	•	• •	· ·	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	••••	•	•	• •	•	•	• •		•	•	• •	•	
	•	•	• •	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	••••	•	•	•	 	•	•	•	• •	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	••••	•	•	•••	•	•		•	•	•	••••	•	•
•	•	•	· ·	•	•	•••	•	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	•	· ·	•	•	•	• •	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	••••	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	•	••••	•	•
•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	• •		•	•	· ·	•	•
•	•	•	• •	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	•	 	•	•	•	• •	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	••••	•	•	· ·	•	•		•	•	•	••••	•	•
•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•••	•	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	• •	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	
•	•	•	• •	•	•	•••	•	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	•	••••	•	•	•	• •	· ·	•	•	• •	•	•	• •	•	•	••••	•	•	•••	•	•	• •	•	•	•	••••	•	•
•	•	•		•	•	· ·			· ·		•		· ·	•	•	•	· ·	•	•		• •		•	•	· ·	•	•			•	· ·	•		· ·	•	•					· ·		•

107. of the population has the disease False nyative If a person has the disease, 10% chance test is negative	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		N		E	D		C	A	L	•		T	E	2	T		N		i	•	•	•	•	•	- ·		•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•
If a person has the disease, 10% chance test is negative	•	•	•	 	10	) <sup>1</sup>	ĺ.	•	(	ρf	)	· ·	+1	h			0	oþ	n M	10	(†	าํ₁	JY YC	۱.	•	h	<u>م</u>	۰ ۲	•	十	~પ		C	ti	) 2Ĵ		H	>	•	•	• •	· · ·	•	•			Fa	le	L,	N	Aa		re.
	•	. <del>-</del>	If	• •	a a	ŀ	) い い	<u>،</u>	e e e	•	ł	10	2		• • •	1	L L	•	d	Ń	۲ د د	2	r		י י י	•	ļ0	Ī	1 /		ر م	~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~	n(	e	•	t	ēs	t	•	Ĵ,	2	Ŷ	<u>ر</u> ا و	g	7 Q~	ŀ,	<b>√</b> e		•			• •	•
	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•		•	•	•			•	•	•	•	•	• •				•	•		•		•		• •	
	•			• •	•				•						•	•				•		•												•	•			•	•	•					•		•		•	•	•	•	•
															•	•																								•									•		•	• •	
	•			• •					•						•	•		•																				•	•	•					•	•		•	•	•	•	•	•
		•	•	• •	•	•	•	•	•	•		•			•	•					•					•									•	•		•	•	•	•				•		•		•	•	•	•	
			•	• •	•							•	•						•																	•		•	•		•												
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																																																					
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•			• •																																				•													
	•	•		• •					•						•	•	•			•																		•	•	•	•				•		•		•		•	• •	
	•	•	•	• •		•		•	•	•	•	•	•	•	•	٠		•	•		•					•										•		•	•	•	•								•		•	• •	

	MEDICAL TESTING	
107. of t	the population has the disease - False negat	tve.
If a person ha	s the disease, 10% chance test is negative	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · ·	- False positi	ve
doesn't	have, 307 positive	• •
· · · · · · · · · · · · · · · ·		• •
· · · · · · · · · · · · · · · ·		•••
· · · · · · · · · · · · · · · ·		• •
		• •

MEDICAL TESTING	
107. of the population has the disease	- Faler nyative
If a person has the disease, 10% chance test	is negative
doesn't have	- positive
Suppose a random person tests positive	
	·       ·

MEDICAL TESTING																																										
107. of the population has the disease	- Faler nyative																																									
If a person has the disease, 10% chance test is	s negative - False bositive																																									
doesn't have , 30%	positive																																									
Suppose a random person tests positive	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																																									
What is the probability they have the disease	ze ?																																									
•	•	· ·	•	•	· · ·	•	•	•	• •	· · ·	•	•	• •		le	E D		CA	L	-	Г	23	T		N	G	•	• •	•	•	· · ·	•	•	• •	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	•
---	---	-------	---	---	-------	---	---	---	-----	-------	---	---	-----	------	----	-------	-----	-----	--------	----	-----	----	-------------	----	--------	-----	-----------	-------	-----	--------	-------	----	---	-----	-------	---	---	---	-------	---	---	---------
•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	A		•	•	E	v cr	t	· · ·	th	ot	•	th		þi	N) E	m	•	ho	<u></u> ,	6	ti.	٢	281	و	•		· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	•
•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	В		•	•	E	Ser	Ŧ		the	£	۰ ۲	th	L.	þe	<u>∧</u> 8∙	on	· ·	te	ន៤	· · ·	þo	· i 21	łiι	re	•			•	•	•	· ·	•	•	• • • •
		• •							• •	•						• •	۰				• •	٠					۰	• •						•								
																				•							•	• •	•													•
		• •			• •											• •		• •																								
•		• •			• •				•				•			• •		• •					• •					• •			• •			•					• •			
•	•	• •			• •				•				•		•	• •		• •					• •			• •		• •			• •			•					• •			•
•	•	• •	•		• •	•		•	•			•	•		•	• •		• •	•	•			• •			• •	٠	• •			• •			•					• •	•		•
•	•				• •				•			•	• •		•	• •		•								• •	•	• •		•	•									•		•
•	•	• •	•	•	• •						•		•		•	• •		• •	•				• •		•	•	•	• •			• •								• •			•
•	•	• •			• •				• •			•			•	• •	•	• •										• •		•	• •											1
•		• •		•	• •						•				•	• •		• •					• •	•	•			• •			• •											

· · ·	· ·	•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	١	1	E	DI	C	A	L	7	- E	2	<b>T</b>	N	G		· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	•	· · ·	-	•	•
· · ·	· · ·	•	· · ·	•	•	•	· · ·	ł	, , , ,	· · ·	•	Ē	۲ V	int		ł	ha	t	· · · ·	the	•	þu	l on	  	k k	, Q-3 ,	· · ·	d	2 Ā	م	el	· · · · · ·	•	· · ·		•	•	•	· · ·	•	•	•
• •	· · ·	•	· · ·		•	•	· · ·	Ē	5	· · ·	•	Ē	Ve	nt		<del> </del>	vet	Ļ,	ł	hi	•	þe	\ <b>\$</b> \$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	-t	É\$	ե	)  }	20(	;;+	i∨		•	• •		•	•	•	· · ·	•	•	•
· · ·	· · ·	•	· · ·		· · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	P	h	) (1 ) (1 )	ł		3)	•	· · ·	• • •	•	P	n	(, 'n	А ( ( В	) E	3) 	•		•		<b>7</b>	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	
• •	· ·	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•		•	· ·			•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	• •		•	•	•	· ·	•	•	•
• •	• •	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	••••	•	•	· ·	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	•	· ·	•	•	•	• •		•	•	•	• •	•	•	•

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	MEDICAL	TESTING		
Discore	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · ·
Y U A	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·		
e No		· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·
		· · · · · · · · · · · · ·		
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·		
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·		

MEDICAL TESTING Discore Test Pos Neg Pos No Ner

MEDICAL TESTING Discose Test Pos 40 Meg 0.1 Pos 0.3 No 0.0 Nea

MEDICAL TESTING Disease lest Pos Neg 0.1 0.0 Pos 0.3 0.27 40 No 0.9 Neg

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	MEDICAL TE	STING	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Disease Test	A—has dis	eave tests Pos	Anb
Pos 0.9	0.09		
4 us 0.1 Neg 0.1	0.01	· · · · · · · · · · · · · · · ·	
No 0.9 Pos 0.3	0.27		· · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Neg 0.7	0.63		
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · ·

	MEDICAL TESTI	NG	
Discon Test	A - has disease	tests Pos	ANB
P.0 209	0.09		
4 4 0.1 Neg 0.1	0.01	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
No 0.9 Pos 0.3	0.17		· · · · · · · · · · · · · · · · ·
Neg 0.7	0.63		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

MEDICAL TESTING A has disease R tests Pos Discase Test ANB Pos 0.9 Neg 0.1 40 0.0 Pos 0.3 No Neg 07 0.63  $Pr(A|B) = \frac{Pr(A A B)}{Pr(B)}$ 

MEDICAL TESTING A-has disease R-tests Pos Discore Test ANB Pos 0.9 40 0.0 Neg 0.1 Pos 0.3 No Neg 07 0.63  $Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$ 0.09 0.09+0.27

MEDICAL TESTING A-has disease R-tests Pos Discore Test ANB Pos 0.9 Neg 0.1 40 Pos 0.3 No Neg 0.7 0.63  $Pr(A|B) = \frac{Pr(A A B)}{Pr(B)}$ 0.09 0.09+0.27

MEDICAL TESTING A-has disease B-tests Pos Discase Test ANB Pos 0.9 400. 40 Neg 0.1 0.01 No 0.9 Pos 0.3 0.27 Neg 0.7 0.63 6 Whaaaat ??  $Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} = \frac{0.09}{0.09 + 0.27} =$ Most people (90%) don't have the disease Positions are mostly disease-free.

· · · · · · · · · · ·		Med	ICAL TE	STING	· · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · ·	
Discon	Test				· · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·
· · · · · · · · · · ·	P.0.9	0.09	Pr (	Teet is	correct)	· · · ·	  	· · · · ·
4 U 0.	Neg 0.1	0.0	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · ·	· · · · ·
No o.	Pos 0.3	0.17	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · ·	· · · · ·
· · · · · · · · · · ·	Neg 0.7	0.63			· · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · ·	· · · ·
· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · ·	· · · · ·
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · ·	· · · · · · ·	· · · · ·
· · · · · · · · · · ·					· · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·

· ·	· ·	· · ·	· · ·	•	••••	• •	· · ·	•	Ņ	le	D D	10	A	L		Γe	2	TI	N	G		· ·	•		•	•		•	•	· ·	•	· ·	•	· ·
· ·	Ţ	)ise	osi	•	Te	st	••••	•	· ·	•	· ·			•	· ·	•	· ·	•	•••	• •	•	· ·	•	• •	•	•	· ·	•	•	· ·	•	• •	•	••••
· ·	· ·	· ·	· · · ·	F	°20	0.9	· ·	0.	09	•	· ·			Py	ι.	(r) . r	T	et	• •	21		Co	2	e A	-)	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	•	· · ·
· ·	 	40	0.		Nea	0.1	· · ·	0	0	•	· ·			T	· ·	0	- 10	9	· ·	┢	0	6.	3	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	•	· · ·
• • • •	• •	No	0.	90	Po	<u>s</u> 0.	3	0.	127 127		· ·		· · ·	T	· ·	Ø	· · ·	f-5	2	• •		· ·	•	• •	•	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	•	· · ·
· ·	• •	· ·	· · ·	•	Neg	0.3	Ŧ	0,	63		• •	• •	• •	•	• •	•	· ·	•	• •			• •	•	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	· ·
· ·	· ·	· ·	· · · ·	•	· ·	· ·	· · ·	•	· ·	•	· ·	• •		•	· ·	•	· ·	•	• •	· ·		· ·	•	• •	•	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	•	· ·
• •	• •	• •	· · ·	•	• •	• •	•••	•	· ·	•	• •	• •		•	• •	•	• •	•	•••	• •		••••	•	• •	•	•		•	•	••••	•	· ·	•	• •
• •	•		· · · ·	•	• •			•	• •	•	• •			•	• •	•	• •		• •	• •			•	• •	•			•	•	• •	•		•	

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Medi	CAL TESTING
Disease Test		
P.0 209	0.09	Pr (Test is connect)
4 13 0.1 Neg 0.1	0.01	= 0.09 + 0.63
No 0.9 Pos 0.3	0.27	= 0, 72
Ney 0.7	0.63	The test is likely to be right.
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		But if it says "You have the disease"
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		it is likely to be wrong !

· · · · · · · · · · ·	Me	DICAL TEST	TING	
Diseas	n Test			
	Po. 0 9.0 0.1	A noive	- test that al	ways says
y u	Neg 0.1 0.0	"negative	" will be night	90% of the time
No	0.9 Pos 0.3 0.27			
	Ney 0.7 0.63	Is the	naire test "bett	w" ?

	Med	ICAL TESTING
Discor	r Test	
	Pos 0.9 0.09	A noive test that always says
Y US No	Neg 0.1 0.01 Pos 0.3 0.27	"negative" will be right 90% of the time
	Neg 0.7 0.63	Is the naive test "better"?
· · · · · · · · · ·		Accurery 7 Utility, in genuel
· · · · · · · · · · ·		False negatives can sometimes be much
· · · · · · · · · ·		Univer than Join politives

									1	_																									*												• •
									. f	3,				-					1			Ê.				. /	2				. 1		9		A .		-	 									
										74	łI	L	H	D	)(	17	Κ.	_	-	-		L		•		. (	_	A	2		N	.0	. I	)	l (	$\Box$	E.										
											••		••				•			•								••	-	•	• •				- •												
																																		•	•												
		•	•	•		•	•	•	•				•	•	•			•		•	•				•		•	•	•		•		•	•	•	•	• •										
											•	•																							•	•	• •										• •
												•																							•	•	• •									•	
										•	•	•									•												•		•		• •					•			•	•	• •
							•	•		•	•	•									•													•	•		• •					•		•	•	•	• •
										•	•	•		•		•		•	•											•			•	•	•	•	• •					•			•	•	
																																										•					
																																		•													
					0	•	•	•					0	0	•			0		0	•				•		•	•	0		•		•	•	•	•	• •										
		•	•			•	•	•	•	1	•		•	•	•	•		•	•	•		•	•	•					•	•	•		•	•	•	•	• •						•				
																					•																								•	•	
							•	•		1	•	•			•						•				•						•		•	•	•	•	• •	 								•	• •
1							•	•		•	•	•			•						•				•		•	•			•		•	•	•	•	• •					•	•	•		•	• •
						•	•	•		•	•	•		•	•	•		•	•		•									•	•			•	•	•	• •			•	•	•		•	•	•	• •
										•	•	•																							•				•			•			•	•	
								•							•	•			•								•	•		•	•			•	•		•					•		•	•	•	

•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	· · ·	· · ·	P	A	R	A	D	0	X	•	<b>‡</b>	F				· · ·		C	• <b>A</b> : •	<b>S</b>	11	10		T	)       	<b>C</b>	E	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	
•	•	· · ·	•	• <del>•</del> •	· · ·	•	Te te		· ·	ŀ	) i	K	• • • •	0		· · ·	n	٧r	n I	) )	ъ	· ·	1 1	r ↓ ↓	•	E	· · ·		l l		2,		· · · · · · · · ·	- - -	6	2		•	•	· ·	•	•	•	· ·	
•	•	• •		•				•	• •		۰		•	•	•			•	•	•	•				•						• •			• •								•	•		•
							•					•	•											•									•			•	•		•				•		
					• •																										• •														
					• •																										• •												•		
•	•	• •			• •			•																						•				• •				•	•	• •			•		
•	•	• •		•	• •			•			•				•					•	•		•	•		•	• •		•	•	• •			• •	•			•	•				•	• •	
•	•	• •			• •			•	• •		•				•						•				•	•	• •				• •			• •					•	• •			•	• •	
•	•	• •		•	• •		•	•							•												• •	•		•				• •				•	•		•			• •	
•	•		•	•	• •		•		• •						•												• •			•	• •			• •				•	•	• •					
		• •			• •				• •						•					•	•		•								• •												•		
	•	• •			• •			•						•	•				•	•	•						• •				• •			• •											
•	•	• •			• •			•						•	•				•	•	•					•	• •				• •			• •					•					• •	
•	•	• •		•	• •			•	• •					•	•				•	•	•				•	•	• •				• •			•					•						
																											• •																	• •	

<ul> <li>★ You pick a number N ∈ {1,2,, 6}</li> <li>★ Roll 3 dice (each due is 6-sided and -fair)</li> </ul>	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		P	A	R	A	1	D	0	X	, , ,		#		ł		•	•	•		C	A	S		Ņ	0		1		(		Б	· · ·	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•
* Roll 3 dice (each die is 6-sided and fair)	•	•	•	•	•	• -≯	17	•	•	l l	0 V 0		•	Þ	, , , ,	:J¢		•	Ø	•	-	n	N	m	b	า ช	י ל ג	•	•	↑	↓ ↓	•	E	•		•	l	f	2			• • •	)	k	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	2	•		•	•	•	•	•	•	•	•
	•	•	•	•	•	*		•	•	R	0)	U	•	•	3	•	0	ł,	; Ç	e	•	•		e	a	e P	~	. (	di	)e		i ĵe	, ,	•	6	•	ςì	d	d	· · · ·	0	in	d	• • •	1	fı	× ۱	ኢ	,) ,)	•	•	•	•	•	•	•
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•						•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •				•	•	•		•	•	•	•	•	•	•
	•		•	•	•				•		•	•		•	•	•	•	•	•									•			•		•		•				•	•						•	•		•	•	•	•	•	•	•	
		•	•		•	•		•	•	•	•		•		•													•	•	•		•		•		•	•		•																	
	•								•							•	•									•	•												•	•	•														•	•
	•	•	•	•	•			•	•		•	•		•		•	•			•	•					•	•	•			•		•	•	•				•	•	•				•		•		•	•			•		•	•
	•		•	•	•				•		•	•		•														•			•			•	•				•	•	•	• •														
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																																																							•	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•		•	•			•		•								•									•	•	•							•			•	•	•															•	
	•		•	•		•	•	•	•																	•	•	•	•			•	•		•			•	•	•	•	•													•	
	•	•	•	•		•	•		•	•			•				•		•							•	•	•	•			•	•	•	•	•		•	•	•	•	•				1	•	•		•					•	

	PARADOX #1: CASINO DICE
* You	pick a number $N \in \{1, 2,, 6\}$
* Roll	3 dice (each die is 6-sided and fair)
* You	win if N shows up on at least one die
· · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · ·	

•	· · ·	•	· · ·		· ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	P	<b>'</b> A	RI	A7	D(	ĴΧ	· · ·	#	• • • •	1	· •	•	С	<b>A</b> .	<b>S</b> (	1   	0	•	D		C E		•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	· ·	
•	· · ·	•	· · · · · · · →	f	· · ·	lov	r	•	DÌC	K	· ·	Q	· · ·	n N I	۸m	be	ア	· ·	1		E	Ş	Ì	i l,	2	7		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	)	6	Z	· ·	•	•	· ·	•	•	· · ·	
•	· ·	•	, , , , , ,	f	ſ	20	U	· · ·	3	•	di	ìU	, , ,	2 2 2 2	e	ore	h	d	ñe	 ]	۲ ۲	6	<u>(</u>	Sì:	<b>ا</b> و	ł		in	d	V	f	<b>0</b> 11	י רי ג	)	· ·	•	•	· ·	
•	· · ·	•	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	Ê	· ·	Yc	) M	· ·	h	ร <sub>ั</sub> ร์ง			f	•	N	2	sh	°γ	ະ ວ <u>(</u> ເ		þ		0m		Ø	rt		او	0 C		•	07	e Ie	- (	di	e	•	· · ·	
•	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· ·	· · ·	•	•	-	•	· ·		· · ·	•		•			•	· · ·		· ·		•		•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•
•	· ·	•	· · ·	• •	· ·	· · ·	•	· · ·	•	•	· ·	~) h	at	•	1.5		°¶∕ 		6			Ч	-1γ	N. 		•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	
•	· ·	•	· · ·	• •		· · ·	•	• •	•	•	· ·	•	• •	•	• •	•	•	· ·	•	· ·	• •	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	

•	•	•	•	•	•	· ·		•	•	•		Pł	A (	R	A	T		))	r K	•	<b>‡</b>	F		Ł	•	•	•			A	S		N	0		D		<b>C</b>	E	•	· ·		•	•	•	•	•	•	•••	•	•
•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•				•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•		•	
•	•	•	•	•	•	A	i	•	•	•	F	V i	in	t	•		H	h	zł	T.	•		ł	h	•	0	lì	e	•	•	S	h	0 \	הא	י ג נ	•	N			•			•	•	•	•	•	•		•	•
							- ·					•																	•													•	•			•					
	•	•		•		•						•															•	•	•		•			• •								•	•			•		•			
	•	•		•	•	•	•					•					•	•								•	•	•	•	•	•		•	• •				•			• •	•	•	•	•	•	•	•	• •		•
		•			•	•					•		•					•				•				•	•	•	•	•	•	•	•	• •							• •					•	•	•	• •		•
		•			•				•		•	•	•	•	•	•	•	•					•			•	•	•	•	•		•				•		•				•		•	•		•	•			•
					•				•			•														•			•			•		• •		•		•							•		•	•			
		•			•						•		•	•		•		•	•	•			•				•		•	•		•	•								• •							•			
																													•																	•					
		•				•																					•		•	•			•	• •										•	•		•	•			
	•	•		•								•		•		•							•				•	•	•	•			•									•		•	•		•	•			•
	•	•		•		•								•	•	•	•	•	•				•			•	•	•	•	•	•			• •								•				•		•	• •		
		•			•	•					•		•					•				•				•	•	•	•	•	•	•	•	• •							• •					•	•	•	• •		•
		•			•	•					•		•		•					•							•		•	•		•	•	• •							• •				•		•	•	• •		
		•												•	•	•							•			•	•			•	•			• •														•	• •		
					•																										•		•	• •							• •							•	• •		
		•									•		•	•		•	•						•				•		•	•	•	•									• •										

PARADOX #1: CASINO DICE A: Event that it die shows N.  $Pn(win) = Pn(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ 

PARADOX #1 CASINO DICE A: Event that it die shows N.  $Pn(win) = Pn(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$  $= \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3)$ 

PARADOX #1 CASINO DICE A: Event that it die shows N.  $Pn(win) = Pn(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$  $= \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3)$  $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ 

PARADOX #1: CASINO DICE A: Event that it die shows N.  $Pn(win) = Pn(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ Problem!  $= \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3) \checkmark$  $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ 

· · · · · · ·	Par	Adox #1	CASINO	DICE	· · · · · · · · · · · · · ·
	Ai: Event	that ith	die shows	N	
· · · · · · · ·	Pr(win) =	Pr(A <sub>1</sub> V	$A_2 \cup A_3$		Problem!
		$Pr(A_1) +$	$Pr(A_2) + f$	$P_m(A_3)$	Muet take Intersection
· · · · · · · ·		$\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$	· · · · · · · · ·	into account
· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	.       .	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	

PARADOX #1: CASINO DICE A: Event that it die shows N  $Pn(win) = Pn(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$  $Pr(A_1) + Pr(A_2) + Pn(A_3)$  $A_2$  $-\Pr(A_1 \cap A_2) - \Pr(A_2 \cap A_3) - \Pr(A_1 \cap A_3)$ +  $\ln(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ 

PARADOX #1 CASINO DICE A: Event that it die shows N.  $Pn(win) = Pn(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$  $Pr(A_1) + Pr(A_2) + Pn(A_3)$  $-\Pr\left(A_{1}\cap A_{2}\right)-\Pr\left(A_{2}\cap A_{3}\right)-\Pr\left(A_{1}\cap A_{3}\right)$  $+ \ln(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{216}$ 

PARADOX # 1 : CASINO DICE A: Event that it die shows N.  $P_n(win) = P_n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$  $Pr(A_1) + Pr(A_2) + Pn(A_3)$  $-\Pr\left(A_{1}\cap A_{2}\right)-\Pr\left(A_{2}\cap A_{3}\right)-\Pr\left(A_{1}\cap A_{3}\right)$  $+ \ln(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{216}$ = 0.421

PARADOX #1: CASINO DICE A: Event that it die shows N.  $P_n(win) = P_n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$  $Pr(A_1) + Pr(A_2) + Pn(A_3)$  $-\Pr\left(A_{1}\cap A_{2}\right)-\Pr\left(A_{2}\cap A_{3}\right)-\Pr\left(A_{1}\cap A_{3}\right)$ +  $\ln(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{216}$ = 0.421 Unfair game!

Probability nules	
$* \ln (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$	$= P_{n}(A_{1}) + P_{n}(A_{2}) + P_{n}(A_{3}) -P_{n}(A_{1} \cap A_{2}) - P_{n}(A_{2} \cap A_{3}) - P_{n}(A_{1} \cap A_{3}) + P_{n}(A_{1} \cap A_{2} \cap A_{3})$
* Pr (AUB   C)	$= \Re(A c) + \Re(B c) - \Re(A\cap B c)$

NOT TRUE : If  $B \cap C = \phi$ , then  $\ln(A \mid B \cup C) = \ln(A \mid B) + \ln(A \mid C)$ Why is this wrong? h(A|B) =B lr(A|c) =.A C Pr(A|BUC) = 1

					P	A	R	Å.	D	0)	K.		#	2		ς	ín	λi	D	C 10	N	، <sup>ر</sup>	2	•	Pa	-R	A	Ď	, 0)	K	• •	•			•	•	• •
					• •				•	<u> </u>							••	. • 1				•				• • •		-									
•	•	• •		• •								•				•	•	• •				• •			•	• •			• •				•	• •			• •
•	•	• •		• •					• •			•				•	•	• •				• •			•	• •			• •				•	• •			• •
•	•	• •		• •					• •			•				•	•	• •				• •			•	• •			• •				•	• •			• •
•	•	• •		• •								•				•	•	• •				• •			•	• •			• •				•	• •			• •
																													• •								
																																					• •
																										• •			• •								• •
																										• •			• •		• •						• •
																																					• •
		•		• •				•	• •					•				• •				• •				• •			• •					• •			• •
																																					• •

## PARADOX # 2 SIMPSON'S PARADOX


## PARADOX # 2 SIMPSON'S PARADOX



Source: von Kügelgen, Gresele, and Schölkopf, IEEE Thoms. on AI Feb 2021

## PARADOX # 2 SIMPSON'S PARADOX



· · · · · · · · · · ·	PARADOX #	2 Simps	2' N 02	PARADOX	
(Fictitions) data		Young	Old		
	Italy	1	4		
. .	China	4	1		
· · · · · · · · · · · ·					
· · · · · · · · · · · ·			· · · · · ·		
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·

	PARADOX #	2 : Simp	SON'S PAI	RA DOX
(Fictitions)		Young	Old	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	Italy	1/1	1/4	# people survived
. .	Chrina	3/4	$\frac{0}{1}$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · ·	. .	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	

· · · · · · · · · · · ·	PARADOX #	2 : Simp	2 N 02	ARADOX	
(Fictitions)		Young	Old	· · · · · · · · · · · ·	
	Italy	$\frac{1}{1} = 100 \%$	1/4 = 25%	· · · · · · · · · · · · ·	
. .	China	3/4=75%	$\frac{0}{1}$	. .	
· · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · ·	

	PARADOX =	# 2 : Sir	2'N 029N	PARADOX	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
(Fictitions)		Young	Old	. .	. .
	Italy	1/1 = 100 %	1/4 = 257.		
	China	3/4	better 0/1 ,	better	· ·
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	= 07,		
· · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·

PARADOX # 2 SIMPSON'S PARADOX					
(Fictitions) data )		Young	Old	Overall	
	Italy	$\frac{1}{1} = 1007.$	$\frac{1}{4} = 257.$	2/5 = 40% (worse	
. .	China	3/4) be = 75%	$\frac{0}{1}$ better = 07.	3/5=607.	
· · · · · · · · · · · ·					
· · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	