· · · · · · · ·	COL 351	: ANALYCIS	& DESIGN	of AL	GORITHMS	
 				· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · ·		LEC	TURE 4	· · · · · · · ·		· · · · · ·
· · · · · · ·	D	IVIDE ¢	CONQUE	er II	• • • • • • • • • • • •	
A.	SYMPTOTIC	NOTATION (CON	TD.) AND	COUNTIN	G INVERSION	2 N
. .		30, 2024		-ohit v		

ANNOUNCEMENTS / REMINDERS
Sign up on Gradescope and Teams (two channels)
In-class quiz on Tuesday (Aug 6th)
Attendance : based on twohial and in-class gnizzes
Tutorial quiz will start at 1:10 PM (dwration: 10 mins)

· · ·	· ·	INTEGER	MULTIPLICATI	oN	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Gnade-scho	ol multiplication	$\leq 9n^2$	basic	operations
· · ·	Recursive	Algorithm (4 call	\dot{c}	?	
· · ·	karatsnba	algrithm (3 calls))	?	
· ·					
· · ·					

MERGE SORT														
Theorem: For every input away of length n 7,1, Merge sort performs at most 6nlog n + 6n operations.														
· · · · · · · · · · · ·	performs		\int_{2}^{1}	on operations										
. 	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·										
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·										
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·										
· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·										
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·										
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·										

MERGE SORT											
Theorem	For every performs	input at	most	of 6n	length log n -	n 7/1, H 6n	Merge Sort operations				
Original	hort	· · · · · · ·	· · · · · ·	 	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·				
left.		hight	· · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·				
			· · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·				
· · · · · · · · · · · ·			· · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·				
	•••••	••••	· · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·				
lea	ves (single-element as	rays)									

Merge	SORT
Theorem: For every input away performs at most	of length $n = 1$, Merge Sort 6n log n + 6n operations.
hort Original ang left right	Work done at level j
	$= 2^{i} \times 6(n/2^{i}) = 6n$ independent of j
leaves (single-elument aways)	

	THREE	GUIDING	PRINCIPLES	· · · · · ·	
Worst-case (or	advucarial) analysis		· · · · · · ·	
	· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · ·	 	
Not too workied	l about p	necise const	onts	· · · · · ·	
	· · · · · · · · · ·			· · · · · ·	
	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	 	· · · · · · · · · · · · · ·
Asymptotic and	lycic	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	
· ·	· · · · · · · · · ·	· ·		· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·

THREE GUIDING PRINCIPLES	· · · · · · · · · · ·
Worst-case (or advusatial) analysis	· · · · · · · · · · ·
- no assumption on where the input comes from	· · · · · · · · · · ·
Not too workied about precise constants	
- transcend environment dependence	· · · · · · · · · · ·
- mathematically easier and no loss in predictive	pown
Asymptotic analysis	
- only large inputs are "interesting"	

• •																																							
																• •																							
											٠X			. ,	、 -		۲.			. 1					,					•			、			L.			
			F	70 A [*]	F						A	N,		61	AD	Ы	th	m		W	108	P		20	rs1		. C	rse	. .	୍ର ୩	μ	nn	J.Y	Ŷ.		<u>, 1</u>	ne	. .	
			1	n.	U,			1	V						A.																			(
			ſ.,		o .h				Ŷ										L .	1		- <u>1</u>	-11			• 1	. .	• •		• 1			• •						
		ß	L۵.	ልአ	A _H	120	· .							- (:		81_I	V.		D 0	1 M I	n 01	n	an	А.	. hr	14	h.	}	nt	m	1	. 5		(e					
		•••	<u>ч</u>	v	r y.										1: V	Urv		• •	r ···		1/			1	• •	•	•							-					
			1		r 9 .									• (ł	U Y V 		• •	r				- (1		. •			ļ										
••••			J		, y.	11		0		• •	•	• •	· ·) (ł	το γ.» 		• •	r :	0	n 91		; (]					,)		•				•		•		•
• •	•		J				•		•	• •		• •	· ·) - (-] }	U Y V		••••	r	0			(]	· ·		• •	•	,)		•				•	• •	•	• •	•
· · ·	•		J		, y.		•	•	•	· ·	•	• •	· ·	· (]`	U Y V		• •	r				(]	· ·	• • •	• • •	•	, 1	•	•			•	•	· ·	•	• •	•
· · ·	•		J					•	•	· ·	•	• •	· · ·	. (}`			· · ·	r				(]	· · ·	•	• •	•			•			•	•	· ·	•	· ·	
· · ·	•		J					•	•	· · ·	•	· · ·		. (j`	 		· · ·	r	9]	· · ·	•	· · ·	•	,	•	•	· · ·		•	•	· · ·	•	· · ·	•
· · ·			d N N		· · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	· · ·				· (j`	• • •	•	· · ·	r	9			(]	· · ·	•	· · ·	•	,	•	•	· · ·		•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · ·	
				· · ·	· · · · ·				•					. (Ĵ	 			r	9]	· · ·	•	· · ·	•			•	· · ·		•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · ·	
					· · · ·									. (j `	· · ·			r	9]	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	•			•	· · ·	•		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		 	-
														. (J `				r	9]	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•						· · ·			- - - -	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
															Ĵ				r	9]								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
					, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,															З]					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
			3		· · ·															9]		•										· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
			3																	9]												· ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
																																				· · · · · ·		· · · · · ·	
			3																							•												· · · · · ·	
			3																							•													

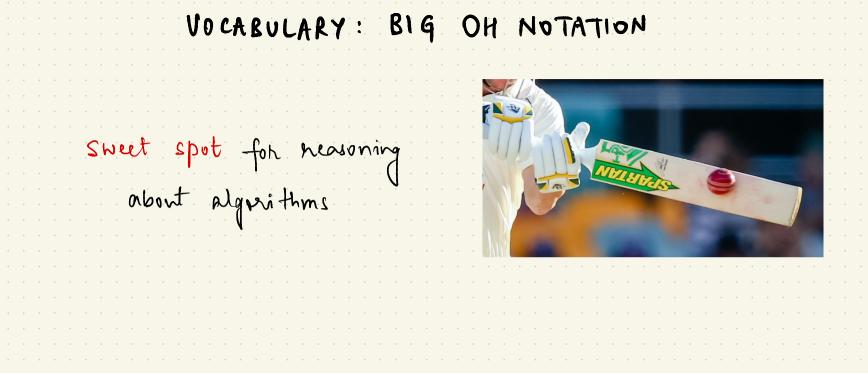
																																• •						•	• •	 			•	
							- 1		_		•	•								Ø	•	~			1 •							- • •								 				
							. 1	VI	0 (Ci	R	R	U		A	ĸ	Y	. .	¥	ß	L	9	. (J	И		N	12		\F		FT:	0	Ņ						 				
								•	-	Ĭ		-		-	• 1					-					• •		•		-	••	•	•												
																															•													
																																• •											•	
																																• •					•	•	•	 			•	•
					•	•		•		•								•									•	•	•	•	•	• •				•	•	•		 			•	•
						•	•	•																						•		• •					•	•	•				•	•
						•	•	•																		•	•		•	•						•	•	•					•	•
						•	•	•										•									•		•	•	•	• •				•	•	•	• •				•	•
						•																								•							•	•	•				•	•
							•																						•								•	•		 				
																																					•			 				
																													•		•													ľ
	0							•			0	0						•	•				0				•		•	•		• •					•	•					•	
	•	•					•	•			•	•						•	•				•		•	•	•		•	•	•	• •					•	•		 			•	
																		•												•		• •					•	•	•	 			•	•
					•	•		•		•								•									•	•	•	•	•	• •				•	•	•		 			•	•
						•	•	•																						•		• •					•	•	•				•	•
•						•	•	•					•	•	•	•		•	•							•			•	•	•	• •							•		•			
					•	•	•	•		•	•	•	•		•	•	•	•	•		•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	• •					•	•	• •	 	•		•	•
						•	•								•	•														•	•						•		•					

· · · · · · · · · · · · · · · ·	VOCABULARY :	BIG OH	NOTATION	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
E.g. 6n lo	$g_1 + 6n$	· · · · · · · · · · · ·	. .	· · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·

· · · · · · · ·	VOCABULARY: BIG OH NOTATION														
E.g.	6n log ₂	n + 6 n				· · · · · · · · ·									
· · · · · · ·	Suppres	constant	factors	and	lower-ord	a term	٩								
· · · · · · ·		System -	dependent		ireelevant	for large	inputs								
		N													
					• • • • • • •										

· · · · · ·	VC	CABULARY	: BIG	OH	NOTATIO	N	
E.g.	6n log	n + 6n	· · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·
· · · · · ·	Suppres	constant	factors	and	lowa-on	du term	2
· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	System -	dependent	· · · · · ·	ireelevant	for large	inputs
		· · · · · · · · · · ·					
· · · · · ·	equate	with n lo	j n		· · · · · · · · · ·		
· · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · ·
· · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · ·	
						· · · · · ·	

· · · · · ·	VOCABULARY: BIG OH NOTATION
E.g.	$6n \log_2 n + 6n$
· · · · · ·	Supprise constant factors and lower-order terms
· · · · · ·	system-dependent irectivant for large inputs
· · · · · ·	equate with n log n
· · · · · · ·	The running time is O (n log n) "big-oh of n log n"
· · · · · ·	" order nlog n"
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·



· · ·	VOCABULARY: BIG OH NOTATION
	sweet spot for reasoning about algorithms
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	coarse enough to avoid environment-specific details sharp enough to allow meaningful comparison among algorithms

•	• •	•		•	•			•			· ·	Q.	Ul(r k	•	F	۲.۲	A ' N	Л) 	F	P		• •	•		•	• •	•	•	•	• •	 •	•	• •	
	• •		• •			• •			•	•		5	Ņ (I				<u>~</u> /	1.1			U,	7	•	• •				• •				•		•	• •	
			• •			• •							• •			• •				• •			•					• •				•		•		
			• •			• •							• •			• •				• •			•					• •				•		•		
			• •			• •							• •			• •				• •			•					• •				•		•		
			• •			• •							• •			• •				• •			•					• •				•		•		
			• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•		•	• •	
	• •		• •			• •				•	• •					• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
			• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•		•	• •	
	• •		• •			• •				•	• •					• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
	• •		• •			• •				•	• •					• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
	• •		• •			• •				•	• •					• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
			• •							•																								•		
			• •							•																								•		
	• •		• •			• •				•						• •				• •			•	• •				• •								
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•			• •	
			• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•		•	• •	
			• •			• •							• •			• •				• •			•					• •				•		•		•
			• •			• •							• •			• •				• •			•					• •				•		•		•
			• •			• •							• •			• •				• •			•					• •				•		•		•
			• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•		•	• •	
			• •			• •							• •			• •				• •			•					• •				•		•		•
			• •			• •							• •			• •				• •			•					• •				•		•		•
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•					• •				•		•	• •	•
	• •		• •			• •				•	• •		• •			• •				• •			•	• •				• •				•			• •	

Quick	Ext	AMPLE.	2	· · · · · ·	· · · · · · ·	
Searching for a number		i An	array	A of	length 1	n
for i = 1 to n	· · · · ·	· · · · · · ·		 		
if A[i] = x hetun TRUE				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
hemn FALSE	· · · · ·	 	 	 	· · · · · · · · · ·
Running time : ?			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·

Quick	EXAN	1PLE.	2 2		· · · · · · ·	· · · · ·	
Searching for a number	n in	an	anay	A of	length	n	
for i = 1 to n	· · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·		
$if A[i] = \chi$ $heter TRUE$	· · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · ·		
hetmin FALSE		· · · · ·					
Running time: 0(n)	 	 		 	· · · · · · · · ·	· · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · ·	· · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · ·	

QUICK EXAMPLES										
Searching for a number	r	in 11	An 4	а С. С. С.	nay	A B	of	length	n	07
for $i = 1$ to n if $A[i] = \pi$	· · ·	· · · ·	· · · ·	· · ·	· · · ·	· · · ·	· · · ·	 	· · · ·	
for i = 1 to n	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	 	· · · ·	 	· · · ·	
if B[i] = x hetrin TRUE	· · ·	· · · ·		· · ·	· · · ·	· · · ·	· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	
hetrin FALSE	· · ·	· · · ·	· · · ·	· ·	· · · ·	· · · ·	· · · ·		· · · ·	· · · · · · · ·
Running time : ?		· · · ·			· · ·	· · ·	· · · ·		· · ·	

QUICK EXAMPLES								
Searching for a number -	n n	An 4	anay	A of B "	length n	07		
for $i = 1$ to n if $A[i] = n$	 	· · · · ·						
for $i = 1$ to n if B[i] = n	· · · · · · · ·	 	· · · · · · ·	· · · · · · ·				
hetun FALSE	· · · · · · ·							
Running time: 0(n)	· · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·				

Quick EX	AMPLES		
Checking fir a common	element in	avays F	l and B
for $i = 1$ to n for $j = 1$ to n <	. .
if A[i] = B[j]			
hetnin FALSE			
Running time : ?			
	· · · · · · · · · · · ·		

Quick EXAM	PLES	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Checking fir a common el	ement in away	s A and B
for $i = 1$ to n for $j = 1$ to n		· ·
if A[i] = B[j]		· ·
hetun FALSE
Running time: $0(n^2)$		· ·
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Quick EXP	IMPLES	
Checking fin a duplicate	entry in away	A
for $i = 1$ to n for $j = i+1$ to n	. .	
if A[i] = A[j] petron TRUE	. .	
hemn FALSE		
Running time : ?		
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

Quick EXA	MPLES	
Checking fin a duplicate	entry in away	A
for i = 1 to n		
for j = i+1 to n		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
if A[i] = A[j] netron TRUE		
hetmin FALSE		
Running time: $0(n^2)$		
d		

				• •					• •				• •						• •										1.1	•	· · · ·		· · ·	
										9		F I		. 1	. 1	•	. (01	~		^													
											D	ヒ		N	N	.(1	. I	DI	9	•	V	n												
												-				. !																		
			0				•																											
				• •					• •		•		• •					•	• •	•	•			•			• •							
				• •					• •		•	•	• •			• •		•	• •		•		• •		• •		• •		•					
		• •		• •				•	• •				• •											•			• •		•	•		•	• •	
		•		• •			•	•	•		•	•	•		•	• •		•	• •	•	•	•	•	•	•		• •			•		•	• •	•
•	•	• •		• •		•		•								• •						•	• •	•	• •		• •		•			•	• •	
		• •		• •				•	• •			•	• •			• •			• •			•	• •		• •		• •	•	•	•		•	• •	
		• •		• •				•	• •				• •			• •			• •				• •		• •		• •	•		•			• •	
		• •																									• •					•		
			0																															
				• •					• •		•		• •					•	• •	•	•			•			• •							
				• •					• •		•	•	• •			• •		•	• •		•		• •		• •		• •		•					
		• •		• •					• •				• •							•				•			• •		•	•		•	• •	
1		• •		• •				•	• •			•	• •			• •		•	• •		•	•	• •		• •		• •		•	•		•	• •	
1		• •		• •				•	• •		•	•	• •		•	• •		•	• •		•	•	• •		• •		• •		•	•		•	• •	•
	•	• •		• •			•	•	• •		•	•	• •		•	• •		•	• •			•	• •	•	• •		• •			•		•	• •	
		• •		• •				•	• •				• •		•	• •		•	• •			•	• •		• •		• •			•		•	• •	
		• •		• •				•	• •				• •			• •			• •				• •		• •		• •	•					• •	
																											• •				• •		• •	

DEFINING BIG OH											
· ·	· · · ·					2 f(n)					
· · ·	т (n) -	is "event	ually bounded	above"	T(n)					
· ·	by	A	Constant	multiple of	f(n).	f(n)					
· ·					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					
• •					\mathfrak{n}						
• •											
• •	• • •										
• •											
• •											
• •											
• •											
• •											

DEFINING BIG OH	
	$2 \cdot f(n)$
T(n) is "eventually bounded above"	(n)
by a constant multiple of f(n).	f(n)
n	→
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
T(n) = O(f(n)) if there exist positive constants c	, and no
such that $T(n) \leq c \cdot f(n)$ for all $n \geq n_0$.	· · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·

DEFINING BIG OH	· · · · · · · · · ·
C = 2	2.f(n)
T(n) is "eventually bounded above"	— ⊤(n)
by a constant multiple of f(n).	f(n)
n n	
T(n) = O(f(n)) if there exist positive constants C	and no
such that $T(n) \leq c \cdot f(n)$ for all $n \geq n_0$.	

$C = 2$ $2 \cdot f(n)$ $T(n)$	
NOTE: $O(f(n))$ is a cat of functione	
NOTE: O(C(n)) is a cat of fourthead	
NOTE: O (flm) is a set of functions	••••
f(n)	
n_{o}	
\sim	
T(n) = O(f(n)) if there exist positive constants c and no	• •
such that $T(n) \leq c f(n)$ for all $n \geq n_0$.	
	• •
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	••••

DEFINING BIG OH	· · · · · · · · · · ·
C = 2	$2 \cdot f(n)$
	- $T(n)$
NOTE: O (f(n)) is a set of functions	· · · · · · · · · · · · · ·
Connect: $T(n) \in O(f(n))$	f(n)
Common ; T(n) = O(f(n))	>
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
T(n) = O(f(n)) if there exist positive constants C	and no
such that $T(n) \leq c f(n)$ for all $n \geq n_0$.	· · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · ·

DEFINING BIG OH	
∴	=2 2.f(n)
Game!	T(n)
First, you pick c and no	f(n)
Then, your opponent picks n.	→ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
T(n) = O(f(n)) if there exist positive constants	c and no
such that $T(n) \leq c f(n)$ for all $n \geq n_0$.	

	•			 • •			• •									•				• •				1	•			
				 			 		E	N .				Г	• •													
				 			 		C	M	h (n l	rι	. t	7	• •												
	• •			 			 				• •							• •						•				
							 				• •							• •									•	

· · · · · · · · ·		ERAMPLES		
Claim :	If $T(n) =$	$a_k n + a_k n + a_{k-1} + a_k n + a_$	- + a,n	$+a_{o}$,
· · · · · · · ·	thun T(n)	$= 0 (n^{k}) .$	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

· · · · · · · · ·		Examples	
Claim :	If $T(n) =$	$a_k n + a_{k-1} n +$	$+ a_n + a_o$,
· · · · · · · ·	thun T(n)	$= 0(n^{k})$	
Proof			
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · ·			
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

Examples												
	If $T(n) =$ thun $T(n) =$	$a_{k}n^{k} + a_{k-1}n^{k-1} + O(n^{k})$	+	$a_n + a_o$,	.							
Proof	Choose no=	i and $c = a_k$	+ a _{K-1} +	+ 0 ₀	· · · · · · · · ·							

· · · · · · · · ·	Examples												
	$ If T(n) = a_{k}n^{k} + a_{k-1}^{k-1} + \cdots + a_{l}n + a_{0}, $ then $T(n) = O(n^{k}). $												
Proof	Choose $n_0 = 1$ and $c = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$												
	might be negative												
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·												

· · · · · · · · ·		Ex	AMPLES		· · · · · · ·	
		$(n) = a_k n^k + T(n) = O(n^k)$		- + a _i n	+ <i>a</i> _o	>
Proof !	Chrose	n _o =1 and	$c = a_{K} $	+ a _{k1} +	+	[a.]
	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	 	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·

· · · · · · · · ·	· · · · · · · ·		EXAMPLES		
		$n) = a_k n^k$ $T(n) = O(n)$	$+ a n + k^{-1}$ n^{k}).	- + a	$n + a_{o}$,
				$ + a_{k+1} $	$+ - + a_{o} $
	i i i k i k i k	arbitrary			
		· · · · · · · · · ·			
			• • • • • • • •	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·
		· · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

· · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · ·	· · · · · ·	Exp	ampl es	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · ·
Claim :				n^{k} + 0 (n^{k})	k-1 α_n +	+ a	n + a _o		
Proof:		• • •			$c = a_{K} $	$+ a_{k+1} $	∔: :^:^: - !	- [a _o	l
· · · · · · · ·	Fix a	an Qu	nbitra	ry n;	γn_o .	· · · · · · · · · ·			
				ry n ; + [0			<mark> a₁]n +</mark>	[a. [· · · · · · · · · · · ·
				V	≥ n _o . 1 _{k-1} n +		a ₁ n +	[a.]	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
				V			 a₁ n +		. .
				V			a ₁ n +		. .
. .				V			[a₁] n +		
. .				V			 a₁ n +		. .
. .				V			(a ₁)n +		. .
				V			a ₁ n +		 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

· · · · · · · · ·	EXAMPLES
Claim :	If $T(n) = a_k n^k + a_k n^{k-1} + \cdots + a_n n^k + a_0$, then $T(n) = O(n^k)$.
	Choose $n_0 = 1$ and $c = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_0 $ Fix an arbitrary $n \ge n_0$.
· · · · · · · ·	$T(n) \leq a_{k} n^{k} + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_{1} n + a_{0} $
· · · · · · · · ·	$\leq a_{k} n^{k} + a_{k+1} n^{k} + \cdots + a_{k} n^{k} + a_{0} n^{k}$

	ERAMPLES
Claim :	If $T(n) = a_k n^k + a_k n^{k-1} + \cdots + a_n n^m + a_0$, thun $T(n) = O(n^k)$.
Proof	Choose $n_0 = 1$ and $c = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_0 $ Fix an arbitrary $n \ge n_0$.
· · · · · · · · ·	$T(n) \leq a_{k} \frac{k}{n} + a_{k-1} \frac{k-1}{n} + \cdots + a_{1} n + a_{0} $
	$\leq a_{k} n^{k} + a_{k+1} n^{k} + \cdots + a_{1} n^{k} + a_{0} n^{k}$
	$= c.n^k$

· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	EXAMPLES	· · · · · · · · · ·	
Claim :	$If T(n) = n^{k}$	thm $T(n)$ is	not 0(n	[K−I]),
• • • • • •				

EXAMPLES Claim: If $T(n) = n^{k}$ then T(n) is not $O(n^{k-1})$. Proof: (by contradiction) Suppose $T(n) = O(n^{k+1})$.

· · · · · · · · ·	Eramples	
Claim :	If $T(n) = n^{k}$ then $T(n)$ is not $O(n^{k-1})$.	
Proof	(by contradiction)	
	Suppose $T(n) = O(n^{k+1})$. Then, for some positive	constants
· · · · · · · ·	c and no and for all n 7, no,	· · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · ·	$T(n) \leq c \cdot n$	
· · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · ·		

· · · · · · · ·	Examples	
Claim :	If $T(n) = n^{k}$ thun $T(n)$ is not $O(n^{k-1})$.	
Proof	(by contradiction)	
· · · · · · · · ·	Suppose $T(n) = O(n^{k+1})$. Then, for some positive con	starts
· · · · · · · ·	c and no and for all n 7, no,	· · · · · · · ·
· · · · · · · ·	$T(n) \leq c \cdot n^{k-l}$	
· · · · · · · ·	\Rightarrow n \leq C	· · · · · · · · ·
· · · · · · · ·		· · · · · · · ·
· · · · · · · · ·		· · · · · · · · ·

· · · · · · · ·	Eramples
Claim :	If $T(n) = n^{k}$ then $T(n)$ is not $O(n^{k-1})$.
Proof	(by contradiction)
· · · · · · · · ·	Suppose $T(n) = O(n^{k+1})$. Then, for some positive constants
· · · · · · · ·	c and no and for all n 7, no,
· · · · · · · · ·	$T(n) \leq c \cdot n$
· · · · · · · ·	\Rightarrow n \leq C
· · · · · · · ·	Contradiction

							-								• •											• •										÷	÷ •	· • •		· · · · ·	• •	
											- 1	21	6		· •	M	C	C	A :	•		0	۱ /	•		-	บ	E	Т	A		• •										
												DI	P				Ę	91	Π.	.9		Ð	ļ	1		. I .	Π	C,	1	ŗ												
						•	•																	•														•			• •	
						•	•																												•							
																																			•					•		•
						•	-																•	•											•			•		•	• •	
					•	•	•	•																	•							• •		•	•	•		•		•	• •	•
					•	•	•	•																	•							• •		•	•	•		•		•	• •	•
					•	•	•		•				•	•			•				•		•	•	•							• •			•	•		•		•	• •	
						•	•																		•										•					•		
				•	•	•								•									•		•						•	• •		•	•		• •			•	• •	•
			•	•	•	•	•				_'		•	•							•		•	•	•						•	• •		•	•	•	• •	•	•	•	• •	•
•			•	•	•	•	•		•		•		•	•			•	•					•	•	•		•				•	• •		•	•	•	• •			•	• •	•
					•	•	•							•							•	•	•	•	•							• •			•	•	• •			•		
					•	•								•											•			•	•						•	•	• •			•		
					•	•								•											•			•	•						•	•	• •			•		
				•	•	•							•	•							•		•	•	•						•				•	•	• •	•		•	• •	
					•	•	•							•									•	•	•							• •			•		• •			•		
					•	•	•							•									•	•	•							• •			•		• •			•		
						•	•																•	•	•				•			• •			•		• •			•		
				•	•	•							•	•											•						•	• •		•	•					•	• •	
				•	•	•							•	•											•						•	• •		•	•					•	• •	
	•		•	•	•	•	•		•	•	•		•	•	• •	•	•	•		•			•	•	•	• •	•			•	•	• •		•	•	•	•			•	• •	
	•		•	•	•	•	•		•	•	•		•	•	• •	•	•	•		•			•	•	•	• •	•			•	•	• •		•	•	•	•			•	• •	
	•		•	•	•	•	•		•	•	•		•	•	• •	•	•	•		•			•	•	•	• •	•			•	•	• •		•	•	•	•			•	• •	
	•		•	•	•	•	•		•	•	•		•	•	• •	•	•	•		•			•	•	•	• •	•			•	•	• •		•	•	•	•			•	• •	
	•		•	•	•	•	•		•	•	•		•	•	• •	•	•	•		•			•	•	•	• •	•			•	•	• •		•	•	•	•			•	• •	
			•	•	•	•	•							•	• •						•	•	•	•	•	• •					•	•			•					•	•	
					•	•	•		•					•	• •		•			1	•	•	1	•		• •						• •								•	•	
					•	•	•		•					•	• •		•			1	•	•	1	•		• •						• •								•	•	

BIO	G OMEGA &	BIG	THETA	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · ·
-(2)						
$T(n) = \mathcal{D}(f(n))$ if	- there exist					
havitive a to to fo	and in such that					
positive constants C	and 11 such from					
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						
$T(n) \rightarrow c$	Γ ()					
T(n) 77 C	- T(n)					
for all n Z/no						

BIG OMEGA & BIG THETA	
$T(n) = \mathcal{I}(f(n))$ if there exist	f(n)
positive constants c and no such that	- $T(n)$
$T(n) \neq c \neq (n)$	$\frac{1}{4}$ f(n)
for all n 7/ no-	
n	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

BIG OMEGN & BIG THETA	ρ()
$T(n) = \mathcal{I}(f(n))$ if there exist Λ	f(n)
positive constants c and no such that	- T(n)
T(n) = c - f(n)	$\frac{1}{\sqrt{1+f(n)}}$
for all n 7/ no	\rightarrow $c = \frac{1}{4}$
n n	· · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · ·

BIG OMEGA & BIG THETA		
$T(n) = \mathcal{I}(f(n))$ if there exist Λ	f (n)	· · · · ·
positive constants c and no such that	Τ(n)
$T(n) \neq c f(n)$		f(n)
for all n Zno		= 1/4
$T(n) = \Theta(f(n))$ if there exist	· · · · · · · ·	· · · · ·
positive constants C1, C2, and no such that		
$c_1 f(n) \leq T(n) \leq c_2 f(n)$	· · · · · · ·	
for all n 7/ no	· · · · · · ·	· · · · ·

BIG OMEGA & BIG THETA	
$T(n) = \mathcal{I}(f(n))$ if there exist Λ	f(n)
positive constants c and n such that	T(n)
T(n) = c + f(n)	$\frac{1}{4}$ f(n)
for all n 7/ no-	$e = \frac{1}{4}$
n	3f(n)
$T(n) = \Theta(f(n))$ if there exist	T(n)
positive constants C1, C2, and no such that	$\frac{1}{2}f(n) = \frac{1}{2}$
$c_1 \cdot f(n) \leq T(n) \leq c_2 \cdot f(n)$	
for all n Z/no	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
$\int \mathcal{V} \mathcal{V} \mathcal{V} \mathcal{V} \mathcal{V} \mathcal{V} \mathcal{V} \mathcal{V}$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

BIG OMEGA & BIG THETA	
$T(n) = \mathcal{N}(f(n))$ if there exist Λ	f(n)
positive constants c and no such that	T(n)
$T(n) \neq c f(n)$	$\frac{1}{4} f(n)$
for all n Zno	> e=1/4
$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n)) $	$3f(n) = \frac{c_2 = 3}{c_2}$
$T(n) = \Theta(f(n))$ if there exist	T(n)
positive constants C1, C2, and no such that	$\frac{1}{2}f(n) q=1$
c_1 , $f(n) \leq T(n) \leq c_2$, $f(n)$	
for all n 7/ no	$\xrightarrow{\cdot}$

•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	E	X	.	M	P	יר	E	ر کرز د	<u>כ</u>	•	•	• •	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	- ·	• •	•	•	•	•	•
•	•	•	•		n		•			•	•	•	0	, (1	n)		.)	•	· ·	Ω Ω	- ('n)	•	, ,	•	Ð	(* *	nŗ)" 		7	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	•
•	•	•	•		Υ	η	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·			•	•	•	•	•	• •		•	•	•	· ·	•	•	•	•	•		•		· ·	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·		•	•	•	•	•	•	· ·	• •	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•		••••	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	0	•	•	• •	• •	•	•	•	•••	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	0	•	•
•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	•	•	•	• •	•••	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	• •	••••	•	•	•	•	
•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·			•	•	•	•		· ·		•	•	•	· ·	•	•	•	•	•		•		· ·	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	• •		0	•	•	•	0	0	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	• •	0	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	0	•	•	•
•	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	• •	0	•	•	•	0	•	•	• •		•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	0	0	•	•
•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•		•	•	0	•	•	• •	• •	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•		• •	•	•	•	•	•

· · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	EXAMPLES		•
· · · ·	n ha	= 0(n),	$\Omega(n)$, $\Theta(n)$?	•
	log n				
· · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•
· · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•
· · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•
· · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•
· · ·	· · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•
· · ·	· · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•
· · ·	· · · · · ·				•

· ·	••••	· · ·	· · · · ·	· · · · · · · · ·	Exampl	23-		· · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	n log n	W	0(n)	, <u>n</u> (n),	Ð(n)	?	 . .<		. .	
· · ·	· · ·	m 100		0 (n)	, _1 (m) ,	⊕(m)	?	 . .<	 		•
· · ·	· · ·	· · · ·		· · · · · · · · ·			· · · · · · ·	· · · · ·	· · · · ·		
· · ·	· · ·	· · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·		•
· ·	· ·	· · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · · ·	· · · · · · ·	 	 	· · · · · · · · · · · ·	•

EXAMPLES O(n), $\Omega(n)$, O(n)? log n = O(n), $\Lambda(n)$, $\Theta(n)$? \mathcal{M} 00

· · · · · · · · · · · · · · ·	Examples	•
$\frac{n}{\log n} =$	$O(n)$, $\Omega(n)$, $\Theta(n)$?	•
<u>n</u> = 100	$O(n)$, $D(n)$, $\Theta(n)$?	•
n ² =	$O(n)$, $\mathcal{L}(n)$, $\Theta(n)$?	•
n ² =	$O(n)$, $L(n)$, $\Theta(n)$?	

	Examples
$\frac{n}{\log n} =$	$O(n)$, $\Omega(n)$, $\Theta(n)$?
$\frac{n}{100} =$	$O(n)$, $\Omega(n)$, $\Theta(n)$?
n ² =	$O(n)$, $\mathcal{I}(n)$, $\Theta(n)$?
n ² =	$O(n)$, $\mathcal{I}(n)$, $\Theta(n)$?

		IPLES	
$\frac{n}{\log n} =$	- 0(n), _n(n)	, Ð(n) ?	
<u> </u>	- O(n), I(n)	, $\Theta(m)$?	
n ² =	O(n), $J(n)$, ∂(n) ?	
Others :	T(n) = o(f(n)) "little oh"	$T(n) = \omega(f(n))$ "little omega"	self-reading

SIGACT 1	lews
----------	------

Apr-June 1976

BIG OMICRON AND BIG OMEGA AND BIG THETA Donald E. Knuth Computer Science Department Stanford University Stanford, California 94305

Well, I think I have beat this issue to death, knowing of no other arguments pro or con the introduction of Ω and Θ . On the basis of the issues discussed here, I propose that members of SIGACT, and editors of computer science and mathematics journals, adopt the O, Ω , and Θ notations as defined above, unless a better alternative can be found reasonably soon. Furthermore I propose that the relational notations of Hardy be adopted in those situations where a relational notation is more appropriate.

																		• •																					• •			
															• •			• •					• •				• •											•	• •			
																		• •									• •											•				
																		• •									• •											•				
																											• •											•	• •			
																											• •											•	• •			
																											• •											•	• •			
																											• •											•	• •			
																											• •											•	• •			
																						1					• •			•		• •										
												M	0	RI	F -	- 1	DI	V	1.1	D	E.	8		C	01		A	0	F	R												
													Y	121	Y .						· ·	7			-			Ţ.	Y.									•	• •			
										• •											•		•																			
																				•		 •	• •																			
•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	· ·	•	•	•	•	• •	•	•	· ·		•		 •	••••	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	• •	•	•	•	•	•		• •	•	•	
•	•	• •	0	•	•	• •	•	•	•	· ·	•	•	•	•	• •	 •	•	· · ·		•	•	•	••••	•	•	•	• •	•	•	· ·	•	• •	•	•	•	•	•		• •	•	•	
•	•	• •	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	•	• •	 •	•	· · ·		•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	• •	•	•	•	•	•		· ·	•	•	
•	•	• •	•	•	•	· ·	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	· · ·	•	•	· · ·		•	• •	•	· · ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	• •	•	•	•	•	•	•	· ·	•		•
•	•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	· · ·	•	•	· · ·		•		•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•		•	· · ·	•	•	•	•	•		· · ·	•	•	•
•	• • • • • •	· · ·	•	•	•	· · ·	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	• • • • • •	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·		•		•	· · ·	•	•	• • • • • •	· · ·	•	•		•	· · ·	•	•	•	•	•				•	
•	•	· · ·	•	•	•	· · ·		· · ·	•		· · · ·	•		•	· · ·			· · ·		•					•	• • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•		•	· · ·		· · · ·	•	•					-	•
· · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•	· · ·			•	• • • • • •				· · ·				• • • • • •			•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•		-	· · ·		· · · · ·	•	•						•
	· · ·			-		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·								• • • • • •											· · ·			· · · ·	•		-		•			•						
				• • • • • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·												· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·													• • • • • • • • •		•									
				• • • • • • • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·									· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		• • • • • • • • • •			• • • • • • • • • • •			• • • • • • • • •		•			• • • • • • • • • •		· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		• • • • • • • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·									· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		• • • • • • • • • •			• • • • • • • • • •			• • • • • • • • • •		•			• • • • • • • • • •		· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
																									• • • • • • • • • • • •			• • • • • • • • • • •			• • • • • • • • • • •		•					· · · · ·				
				• • • • • • • • • •																					• • • • • • • • • • • •			• • • • • • • • • • • •														
				• • • • • • • • • • •																																						

									• •										•								• •			•			
							•	n .			- 1	. 1	-					-	-		 ~	. 1 -	0										
							.(20	V	N		N	4		11	Å.	V	E	1	5	V	N,	7										
																																	Ì
																																	Ì
																																	Ì
																																	ľ
																																	ľ
																																	Î
		•	•	• •			•						• •			•		•	• •		•	• •				•						•	
		•		• •			•		• •				• •			•		•	• •			• •				•						•	
				• •									• •																				
				• •									• •																				

•	· · · ·	••••	•	• •	•	· · ·	•		C	01	ĴŅ	JT		1	q	· ·		4 (JE	F	ک	L) (21	· ·	•		••••	•	· ·	•	• •		•	• •		•	•
•	ìnp	ut	•			le	n (qth		n	• •	an	a	1 1	r F	ł	0	f	0	l's	:†ì	nc	t	ir	ite	2ge		2	•	· ·	•	• •	• •	•	• •	, , , ,	•	•
•	Ont	þul	t :	· ·	H	he	, ,	nu	, m	b	er.	, , ,	of	•	ir	\√.€	عمع	lion	2'n	•	0	۰ ۱۰	A	•	· ·	•	•	••••	•	· ·	•		•••	•	• •		•	•
•	· · ·	•••	0	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	0	•	• •	•	• •	•	• •	0		• •	•	• •	•			•	0 0			•
	· · ·	••••	•	• •	•	· ·	•		•	•	• •	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	•	•	• •	•	· ·	•	· ·	•	• •	· ·	•	· ·	•			•		•••	•	•
•	· · ·	• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	••••	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	· ·	•	· ·	•	•	• •	•	· ·	•	• •		•		• •	•	•
•	· · ·	• •	•	• •	•	· ·	•	• •	•	•	• •	•	••••	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	· ·	•	· ·	•	• •	• •	•	· ·	•	• •	• •	•	•	• •	•	•
•	· · ·	•••	•	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	••••	•	•	• •	•	· ·	•	• •	•	•	· ·	•	• •	•	• •		•	• •	•••	•	•
•	• • •	• •	•	• •	•	••••	•	• •	•	•	••••	•	••••	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	••••	•	•	· ·	•	••••	•	• •		•	• •	• •	•	•
•				• •	•		•		•	•	• •	•		•	•	• •	•	• •		•	• •	•			• •	•		•••	•	• •		• •		•	• •		•	•

	COUNT	TING INVERSION	2 h o
input:	a length n a	way A of distinct	t integers
Output:	the number	of inversions of	A
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	pairs (i, j) o.	f away indices with
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·		A[i] Z A[j]
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

· · · · · · ·	Cou	UNTING IN	VERSION	2	
input:	a length n	away A of	2 distinct	integers	· · · · · · · · · · · · ·
Ontput:	the numb	er of inversion	A fo 2nd	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·			away indi	as with
 				A[i] > A[j	
e.g.,	1 3 5 2		0		
· · · · · · · ·	# inversions				
· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · <	.			· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• •

	COUNTING INVERSIONS
input:	a length n away A of distinct integers
Output:	the number of inversions of A
	pairs (i, j) of away indices with
	$i \leq j$ and $A[i] \geq A[j]$.
e.g.,	135246
	\neq invasions =
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

	COUNT	ING INV	JERSION	2	· · · · · · ·	
input:	a length n av	ay A of	distinct	integers	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·
Output:	the number (of inversio	ns of A	· · · · · · · · ·	 	· · · · · · · ·
		pairs	(i,j) of	away ir	idias p	rith
	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	i∠j	and 1	A[i] Z A	tj7.	
e.g.,	1 3 5 2 4	6		· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	
	# inversions =	· · · · · · · · · · · ·	(=2, L=3,		· · · · · · · ·	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · ·

	COUNTING INVERSIONS	
input:	a length n away A of distinct integers	
Output:	the number of inversions of A	
	pairs (i, j) of away indices wi	th
	$i \leq j$ and $A[i] > A[j]$.	· · · · · ·
e.g.,	135246	· · · · · ·
3	# invasions = $i=2, j=4$ i=3, j=4	
	$\hat{\iota}=3$, $\hat{J}=5$	

COUNTING INVERSIONS	
input: a length n away A of distinct integers	· · · · · · · · · ·
Output: the number of inversions of A	
pairs (i, j) of away indices	with
$i \leq j$ and $A[i] > A[j]$	
e.g., 135246	
# invasions = 3 $i=2, j=4$ i=3, j=4	
i=3, $j=5$	· · · · · · · · · ·

· · · · · · · · ·	COUNTING INVERSIONS	· · · · · · · · · · · · · ·
input:	a length n away A of distinct integers	
Output:	the number of inversions of A	· · · · · · · · · · · · · · · ·
	pairs (i, j) of away ind	lias with
	$i \leq j$ and $A[i] \geq A[$	[j].
	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	6 • elements
	# invasions = 3 1 2 3 4 5	. indices

COUNTING INVERSIONS	· · ·
input: a length n away A of distinct integers	· · ·
A fo enclose of inversions of A	· · ·
pairs (i, j) of away indices with	· · ·
$i \leq j$ and $A[i] > A[j]$	· · ·
e.g., 135246 135246 element # invusions = 3	
1 2 3 4 5 6	· · · ·

COUNTING INVERSIONS	•
input: a length n away A of distinct integers	•
Output: the number of inversions of A	-
pairs (i, j) of away indices with	•
$i \leq j$ and $A[i] > A[j]$.	•
e.g., 135246 135246 elements # inversions = 3	
$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5 \qquad 6$	

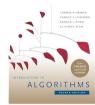
COUNTING INVERSIONS

Customers who viewed this item also viewed



<

Algorithms Sanjoy Dasgupta Compared to the second second



INTRODUCTION TO ALGORITHMS, FOURTH EDITION Charles E. Leiserson ★★★★ 569 Hardcover ₹3,300.00

FREE Delivery

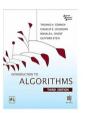
Only 1 left in stock.



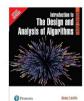
Data Structures And Algorithms Made Easy:... > Narasimha Karumanchi > 3,117 Paperback #1 Best Seller (in Algorithms < 604.00 Get it by Thursday, August 1 FREE Delivery by Amazon



Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, 3e Hopcroft A A A A 386 Paperback 749.00 Get it by Wednesday, July 31 FREE Delivery by Amazon



Introduction to Algorithms (Eastern Economy Edition) > Thomas H. Cormen Th



Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3/e >Anany Levitin ☆☆☆☆☆ 208 Paperback ₹709.00 Get it by Wednesday, July 31 FREE Delivery by Amazon

•	•) (ີ	U	60		at	iv	e	•	fi	lt)	ù I	ng	•	(-	Si	m	i la	27	n NS	Ze		•	g	t	-	2	ìπ	,il	้อง	Қ	. }	hl	_0	D'n	1 <i>1</i> 7	२.२	n	di	at	, 1.97	י אר	· · ·	
						•	•	•	•			•			· (]		•					•		•		· (†				•						• •						•		•	• •	
	•						•	•	•	•	•	•	•	•	• •			•				•	•	•	•	• •						•	•	•	•	• •								•	• •	
	•							•				•											•											•										•	• •	

•	· ·	•	•	· ·		•	•	· ·	•	•	, 1 1	C	0 1	J	N'	T		1	G	•	•] 	1 1	U U	E	R	L S S	- - -	0 (0	N	2	•	•	• •	· •	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	· ·	
•	B	M	nte	· ·	fo	ጉ ጉር	e	· · ·	al	go	יין ואי	;+	hr	n	•	•	C	١٤	c k	ب ر	•	e'	رو	ху • (ŀ) () ()	14			f	Ì	n n n	li	ι L				j)	•	•	•	•	· ·	•
•	• •											•	•																		• •															
	• •		•	• •			•	• •						•	•	•	• •							•	• •									•					•	• •	•			•	• •	•
	• •		•	• •			•	• •						•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•	• •			•						•					•	• •	•			•	• •	
	• •	•	•	• •		•	•	• •		•		•	•	•	•	•	• •	•	•		•	•	•	•	• •		•	•	•		• •	•		•					•	• •				•	• •	
			•	• •		•						•					• •		•					•	• •		•	•	•	•	• •	•		•						• •					• •	
	• •		•	• •				• •						•	•	•								•	• •			•	•		• •			•					•	• •					• •	
	• •		•	• •		•	•	• •						•	•	•	• •		•				•	•	• •		•	•	•	•	• •	•		•					•	• •				•	• •	
•	• •		•	• •		•	•	•						•	•	•	• •		•			•	•	•	• •	•		•	•		• •	•		•					•	• •				•	• •	
•	• •		•	• •			•	•	•	•		•		•	•	•	• •		•					•	• •		•		•	•	• •			•					•	• •				•	• •	
			•	• •		•						•					• •		•					•	• •		•	•	•	•	• •			•						• •					• •	
	• •			• •				• •					•		•										• •						• •			•					•						• •	

•	· · ·	• •	••••	•	· ·	•	• •	(20	U I	JŢ		N	q	•		H١	Ŭ	E	R	SÌ	1 O	12	• •	•	· ·	•	• •	•	•	· ·	•	• •	•	•	
•	Bru	nte	fi	ንኢር	e	a	90	า	thi	n	· ·	C	hei	ck	_	e	Ve	лу	•	þø	ι ι ι	، ، ، ، ا	0.4		Ìn	di	us tus	· (ĺ,	j))	•	• •	•	•	• •
•	· · ·	• •	· ·	•	· ·	•	· ·	• •	· ·	•	• •	•	· ·	•	•										•	· ·	•	• •	•	•	· ·	•	• •	•	•	• •
	· · ·	• •	• •	•	••••	•	• •	• •	•	•	• •	•	••••	•	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •		• •	•	••••	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	• •
	· · · ·	· · ·	· · ·	•	••••	•	• •		• •	•	· ·	•	· ·	•	•	• •	•	· ·	•	••••	•	• •		· ·	•	••••	•	••••	•	•	· ·	•	••••	•	•	• •
•		• •		•	• •	•	• •			•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •				• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	
•	· · ·	• •	• •	•	•••	•	• •	• •		•	· ·	•	· ·	•	•	• •	•	• •	•	• •	•	••••		• •	•	••••	•	• •	•	•	· ·	•	• •	•	•	• •
•	· · ·	• •	•••	•	• •	•	• •	• •	• •	•	• •	•	••••	•	•	• •	•	• •	•	• •	•	• •		• •	•	• •	•	• •	•	•	· ·	•	• •	•	•	• •
•	· · ·	• •		•	• •	•	• •		• •		· ·	•	· ·	•		· ·	•	· ·	•	• •	•	• •			•	· ·	•	• •	•	•	· ·	•	• •	•		
•		• •		•	· ·	•	••••			•	· ·		••••	•	•	••••		• •	•		•				•		•		•	•	••••	•		•	•	

•	•	•	•	• •	· ·	• •	•	•	•	•	•	•	, , ,		D D L)) ;	Ņ	T		Ч Ч	6	ì	•		Ņ	V	E	F	٢	2)	0(N	2	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•
•	6	37	Un	te	• •	fc	- እ -	e	•	r Or		109 109	- 	+	hr	n	•	•	C	he	.c		•	e	ر و	ر بر ا	ſ	ł	20	(1) 1			f		i n	d)		٤	(ì,	J)))	•	•	••••	•	•	•	•
•	•	•	•	• •	• •	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•				ŧ	Э(n	2)		• •	•	•	•	•	· ·	•	•	•		•	•	• •	•	•	•	•
•	•	•	•	• •	· ·	••••	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	· ·	· ·	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	•	•	•••	•	•	•	•
•	•	•	•	• •	• •	· ·	•	•	•	•	•	0 0	•	•	0 0	•	•			in	-	W	e e		lo	•	be	t	tu	.7		•	· ·	•	•	•	•	• •	•	•	•	0	•	•		•	•	•	•
•	•	•	•	• •	· ·	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	• •	· ·	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•
•	•	•	•	• •	· ·		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		• •	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•••	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•
•	•	•	•	• •			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	0	•	• •	· ·	0	•	•	•	• •	•	•	•	•	•••	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•
•	•	•	•	• •			•	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	· ·		•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	0	•	•	•	•	• •	•	•	•	•
•	•	•		•			•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•			•	•	•	•			•	•	•			•	•	•		• •	•	•	•	•	•	•			•	•	•

· · · · · · ·	· · · · · · ·	COUNTING	INVERSIONS	
Brute	force	algorithm: Check		indius (i, j)
· · · · · · · ·	· · · · · · · ·		$\theta(n^2)$	
· · · · · · ·	· · · · · · · ·	Can We	e do better?	
· · · · · ·	Yes	O(n log n) algo,	ithm via divide	- and - congiver.
		\mathcal{A}		
· · · · · · ·	· · · · · · ·			

	COUNTING	INVERSIONS	· · ·	· · · · ·	· · · · · ·	
Call an invers	ion (i,j) where	i∠j	· · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	
left inversion	if i,j ≤	n_{2}	 	 	· · · · · ·	
night inversion	if i,jz	$n/_2$	· · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	
split inversion	$if i \leq \frac{n}{2}$	< j	· · ·	· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·
			· · ·	· · · · ·	· · · · · ·	
			· · ·	· · · · ·	· · · · · ·	

· · · · · · ·		COUNTING	INVERSION		· · ·	· · · · · · ·	
Call	an invusi	on (ì, j) where	i∠j		· · · ·	· · · · · · · ·	
left	in vertion	if i,j <	n/2	· · · · ·	· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·
night	inversion	if i, j 7	n/2	1 3	5	2 4	6
split	inversion	$if i \leq \frac{n}{2}$	< j		· · · ·	· · · · · · ·	
	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·
· · · · · · ·				· · · · ·		· · · · · · ·	
· · · · · · ·							

· · · · · · ·		COUNTING	INVERSIONS	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •	
Call	an invusio	n (î,j) Where	- i z j	· · · · · · · · · · · · ·	
left	invertion	if i,j ≤	_		· · · · · · · · · · · ·
night	invusion	if i, j 7	n/2_	3 5 2	4 6
split	inversion	$if i \leq \frac{n}{2}$		· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
· · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
				· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

	COUNTING INVE	RSIONS
Call an invus	ion (i,j) where izj	
left inversion	$if i,j \leq n/2$	
night inversion	if $i, j > n/2$	135246
split inversion	$if i \leq \frac{n}{2} < j$	all split inversions
· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

	COUNTING INVERSIONS	•
Call an	invusion (i, j) where izj	•
left inv	extion if $i,j \leq n/2$	•
night inv	usion if $i, j > n/2$ Compute these necursively	•
	usion if $i \leq \frac{n}{2} < j \leftarrow \text{compute these in "combine" step}$	
· · · · · · · · · · ·		•
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	0

• •		• •		•			•		• •		ŀ	11	9	H	-	Ľ	E	VE	Ξl	/	F	ŦL	G	0	RI	T	H	M	•	• •		•	•		•				•	•		•
į	nþ	nt	, . , .	•	Cav	٦	0	٨N	rai	l l l	A	•	0,	F		Ŷ	•	d	-2í	tir	r t	t t	ì	nt	g	ren.	C	· ·	•	• •		•	•	· ·	•	•	•	••••	•	•	• •	
									ni	٠.																	•	•••	•	• •		•	•	•••	•	•	•		•	•		
• •		• •			• •		•	•	• •		•	•	•	• •		•	•	•		• •				•			•			•	•	•	•	• •	•		•	• •	•		• •	
• •					• •				• •														•																			
														• •																								• •				
					• •				• •																							•		• •			•	• •	•		• •	•
• •				•	• •			•	• •		•		•							• •				• •						•	•	•	•	• •	•		•	• •	•		• •	
• •	•	• •		•	• •			•	• •				•							• •				• •							•		•	• •	•		•	• •	•	•	• •	
	•	• •		•	• •			•	• •				•							•				•						•	•		•	• •	•		•	• •		•	• •	
	•			•	• •		•	•	• •				•											• •									•	• •			•	• •			• •	
				•	• •		•							• •					•				•						•								•					
• •					• •																																	• •				

		· · · · · ·	HIGH-	LEVEL AL	GORITHM	· · · · ·	· · · · · ·	
	input:	an a	innay A of	n distinct	integers	· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·
			number of			· · · · ·	· · · · · ·	
	if	n ≤	return C)	· · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
	 	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·		· · · · · ·	· · · · · · · · · ·
, , , ,	· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·
• •	· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · ·	· · · · · ·						
	· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·		· · · · · ·	· · · · · · · · · ·
	· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·

HIGH-LEVEL ALGORITHM	· · ·	· · · · ·	· · · ·			
input: an away A of n distinct integers	· · ·	· · · · ·	· · ·	· · ·		
output: the number of inversions of A	· · ·	· · · · ·	· · ·	· · ·		
if n≤1 hetwn 0	· · ·	· · · · ·	· · ·			
else l := recusively count inversions on	left	half	of	A	· · ·	
ん ;= いい いい い	right		· · · ·			
s := Count split inversions of A	· · ·	· · · · ·				
return l + n + s	· · · ·	· · · · ·	· · ·	· ·	· · · ·	
	· · · ·	· · · · ·	· · ·	· ·	· · ·	

HIGH-LENEL ALGORITHM	· · · · ·	· · · · ·	· · · ·		· ·	•
input: an away A of n distinct integers	· · · · ·	· · · · ·	· · ·	· ·	· ·	•
output: the number of inversions of A			· · · ·	· ·	· · ·	•
if n ≤ 1 hetwin 0	· · · · ·	· · · · ·	· · ·	· ·	· ·	•
else l := recusively count inversions on	left	holf	of	A	· ·	•
$\mathcal{L} := \mathbf{u} \mathbf{u} \mathbf{u} \mathbf{u}$	right	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	••••	а.	· ·	•
s := Count split inversions of A	· · · · ·	· · · · ·	· · ·	· ·	· ·	•
return l + n + s	· · · · ·	· · · · ·	· · ·	· ·	• •	•
	· · · · ·		· · · ·			•

																																				• •			• •
•	•		•		• •			•	• •			• •					• •			• •			•	• •					• •			• •				• •			• •
•	•		•		 R			۲ -							- i					• •			- <u>i</u> -	• •							•	 т				• •			• •
•	•		•		A	Ē			<u>N</u> 2	41		1	<u>م</u> ٰ _	Ľŋ	1		• •		1 n			1			-	• •	•	•	•	ń	•	1				• •			• •
•	•			· · /	- 1 -			1	2	1.1	Ì	-	2	1.2		4	·- ·	-	[```	• • •	1	1	1	· 2	- 1	. . .	~	_	1	<u> </u>	·					• •			
											1								Ľ_					• •					1	2	- 1								
•	•		•						• •		•	• •		•			• •			• •		• •		• •		• •			• •			• •				• •			• •
	•	•	•				•	•	• •		•	• •		•		•	• •			• •		• •	•	• •		• •			• •	•	•	• •				• •			• •
•	•		•		• •			•	Ú		•	· ·				、 [*]			0.1				•			- (7 -		• •	•	•	• •			•	• •			• •
	•	•	•				•	•	#	-	· (Sb	<u>ا</u> ۱-	t		IN	(·V)	Cr	51	0 0 0 0	2.		·						• •		•	• •				• •			• •
									· [·			· •																											
		 •	•			•	1	•				. •	•			1					•		•		•			•	• •	•	•		•		•	• •		•	• •
•	•	 •	•	• •	••••	•	•	•	· ·	•	• •	. . 	•	• •	••••	•	• •		•	· ·	•	· ·	•	· ·	•	· ·	•	•	••••	•	•	• •	•	•	•	· ·	•	•	••••
•	•	 •	•	· ·	••••	•	•	•	· ·	•	· ·	. . 	•	• •	· ·	•	• •		•	· ·	•	· ·	•	· ·	•	• •	•	•	· ·	0	•	· ·	•	•	0	· ·	•	•	· ·
•	•	•	•	· ·	· · ·	•	•	•	· ·	•	· ·	· ·	•	•	· ·	•	· · ·		•	· · ·	•	· ·	•	· · ·	•	· ·	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	· · ·
•	•	•	•	· · ·	· · ·	•	•	•	· · ·	•	· · ·	· ·	•	•		•	· · ·		• • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	•	· · ·	- - - - -	· · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	
•	•	•	•	· · ·	· · ·	· · ·	•	•	· · ·	•	· · ·	· · ·	· · ·			•	· · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•		•	· · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	· · ·		•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
•	· · ·	•	•		· · ·	· · ·	•	•	· · ·	•			•			•				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•		•		•	· · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•		•	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	•		•				•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•						•			•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•		•		•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•		•		•			•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	•		•				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•					•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•				•				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	• • • • • • • • •		•																										· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·										· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	• • • • • • • • •									• • • • • • • • • •																· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							
	• • • • • • • • • • •									• • • • • • • • • •					· · · · · ·									· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
	• • • • • • • • • • • •									· · · · · · · · · · · · ·														· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
							• • • • • • • • • • • • •			• • • • • • • • • • •						• • • • • • • • • • • • •								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·												· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			

																							• •		• •															
•		•		•					•	• •			• •		•	• •		• •							• •		• •			• •		•					• •		•	• •
•	•							•	•	• •		•	• •		• •	• •		• •				•	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •		•	• •				• •		•	• •
						 Х			1										•	<u> </u>	• •	÷		- <u>i</u> -	• •		• •		•			•	 Г				• •		•	• •
						A	E.			ΪN.	41			<u>م</u> ` ـ	L n	· [• •		1'n	\mathbf{n}		1		· .		• •				Ń	·				•	• •		•	
									1	2			-	2			-	-	_			1	_	1	Ľ	-	· • ·	$\widehat{}$	-	1	<u> </u>	1								
																				L										1	-	1								
																														• •										• •
•	•	•		•		• •			•	• •			• •		•	• •		• •			• •				• •		• •			• •		•					• •		•	• •
	•	•		•		• •	•		•	• •		•	• •		•	• •		• •			• •	•	• •	•	• •		 0	•	•	• •		•	• •			•	• •		•	• •
	•			•			•		•	U		•	• •			• •	、 `	•			• •			•	· ·	. ,	$\mathcal{N}^{\mathcal{L}}$	1		• •		•	• •			•	• •		•	• •
•	•			•			•			1	-		St	<u>ا</u> ۱-	t	• •	IV	V.V.	Cr	518	3N	2.		·			Γt	1.1	4	• •		•	• •			•	• •			• •
										· I			· 1		-	• •		• •									• •		L.	• •			• •				• •			• •
													- 1																											
•	•		•				•	•	•		•	•	· '	•			•			•		•		•		•	• •	•	•	• •	•	•		•	•	•	• •	•	:	
•	•		•	•		• •	•	•	•	 	•	•	. ! 	•	• •	• •	•	• •		•	• •	•	• •	•	· ·	•	••••	•	•	••••	•	•	•••	•	•	0	••••	•		• •
•	•		•	• •	· ·	• •	•	•	•	 	•	•	. . 	•	• •	· ·	•	• •		•	· ·	•	· ·	•	· ·	•	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·
•	•		•	• •	· ·	· · ·	•	•	•	• •	•	•	 	•	· · ·	· ·	•	· · ·		•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	· · ·	•	•	· ·
•	•		•	· · ·		· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	. . 	•	· · ·	· · ·	•	· · ·		- - - - -	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	· · ·
•	•		· · ·			· · ·	•	•	•	· · ·	•	•		•	· · ·		•	· · ·		· · ·		•		•	· · ·	· · ·	· · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•		•	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
•	•		· · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	•	· · ·	•	•			· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · ·		· · ·		•		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•		•	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	•					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	-	•					· · ·							•					•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•		•		•			•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	•					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•		· · ·	• • • • • •					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					· · · ·		•					•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•				•			•	
	•					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•					· · · ·			•		· · · ·							•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•				• • • • • • • • •				· · · ·	
							· · · ·	· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · ·			• • • • • • • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					•			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·				• • • • • • • • • •				· · · ·	
			• • • • • • • • • •								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						• • • • • • • • • • •								· ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • • • • • •						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
			• • • • • • • • • • •								• • • • • • • • • •						• • • • • • • • • • •								· · · · · ·	• • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				• • • • • • • • • • •						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
																									· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • • • • • • • •									

A =	$\frac{n}{2} + 1 \frac{n}{2} + 2 - - n 1 2 - - \frac{n}{2}$
. .	# split inversions = $n^2/4$
Possibl	e to compute split inversions in O(n) time?
. .	Suffices for O(n log n) time overall

									1																								*	• •			
		• •						<u> </u>	Ċ	~	•.		~																	• •			•			• •	
								-(-		V.			1.		<u>ا</u>				N/	11.			C	٦٠ .	Ŀ									
									1	1/.			1.1	90	ÌЧ	D.	ar	K	. (γ	۱.	<u> </u>	U	λq	6.	2	105	rl									
									Ч	Ľ				1	10									. (e												
									Ņ	Γ.																											
		• •																												• •			•			• •	
		• •																												• •			•			• •	
		• •																												• •			•			• •	
																								•									•			• •	
																								•								•	•			• •	
																								•								•	•			• •	
		• •					• •								•				•	• •				•	• •					• •		•	•	• •		• •	
		• •					• •								•				•	• •				•	• •					• •		•	•	• •		• •	
		• •					• •								•				•	• •				•	• •					• •		•	•	• •		• •	
	•	• •				•	• •								•				•	• •				•	• •					• •		•	•	• •		• •	•
	•	• •					• •								•					• •				•						• •		•	•	• •		• •	•
	•	• •					• •								•					• •				•						• •		•	•	• •		• •	•
	•	• •					• •								•					• •				•						• •		•	•	• •		• •	•
	•	• •					• •								•					• •				•						• •		•	•	• •		• •	•
	•	• •		• •			• •								•					• •				•						• •			•	• •	•	•	•
	•	• •		• •	•	•	•		•			• •			•		•			•		•		•	• •	•	•			• •	•			• •	•	•	•

· · ·	•	· ·	· · ·	•	•	• •	· · ·	•	-) -	•	•). 19	9	Y d	ba		Ĺ	0	n	•	M	U	ge	· · ·	So	ı) T	t	· · ·	•	•	•	• •	•	•	• •			•
· ·	•	S	npp	DS	و		A	•	ho	rs	· · ·	h	0	•	2	þU	ìf	•	Ìr	n ۷	U,	¢2,	00		· ·	•	•	· · ·	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	 •	•	· ·	· · ·	•	•
• •	•	• •	•••	•	•			•	•		• •			•	•	••••		•	•			• •		•	• •	•		• •			0	••••	•		•	••••	 •				•	•
		• •									• •				•	• •						• •				•		• •		0		• •		0	0	• •	 •				0	•
	•	• •		•	•			•	•	•	••••	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	• •	• •		•		•	•	• •	•	•	•	••••	•	•	•			•	• •		•	
	•	• •		•	0			•	•	0			0	•	•		•	•	•	•		• •	•	•		•	•	• •	•	0	0		•	0	•		 •	•			0	•
	•	• •		•	•			•	•	•			•	•	•		•	•	•	•				•		•	•		•	•	•		•	•	•		 •				•	•
• •	•	• •		•	•			•	•	•		•	•	•	•		•	•	•	•			•	•		•	•	• •	•	•	•		•	•	•		 •				•	•
• •	•	• •		•	•			•	•			•	0	•	•		•	•	•	•		• •	•	•		•	•	• •	•	0			•	0	•		 •	•			0	•
• •	•	• •			•			•	•	•	• •	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	••••	•	•	•	• •	 •	•	• •		•	•
• •	•	• •	• •	•	•			•	•	•	• •		•	•	•	· ·	•	•	•	•		• •	•	•	• •	•	•	• •		•	•	· ·	•	•	•	• •	 •	•			•	•
• •	•	• •	• •	•	•			•	•	0	• •			•	•	••••	•	•	•	•	• •	• •	•	•	• •	•	•	• •	•	•	0	••••	•	•	•	• •	•	•	• •		•	•
• •	•	• •		•	0	•		•	•	•	• •		•		•	••••		•	•			• •	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	••••		•	•	• •	 •		• •		•	•

· · ·		- \.	Piggyback on	Merge Si	ort	
· · ·	Suppose	A has no	split inversion.			
· · ·	Then,	every element left half of	in A	every right	element half M	ìn. A
· · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· ·			· ·
· · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · ·
• •						

· · · ·	 	- 20-	Piggyback on	Merge Sc	ort	· · · · · · · ·	 	· · · ·	• • • •
· · · ·	Suppose	A has no	split invursion			· · · ·	· · · · ·		• • • •
· · · ·	Then,	every elemint left half of	$ \cdot \cdot$	every right	element	ìn A	 	 	
		rift nort of	- Λ	rugroi	runt it				
· · · ·			subroutine do				· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • •
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
								

- Piggyback on Merge Sort Suppose A has no split inversion Then, every element in left half of A every element in right half of A What does may e subroutine do for such away? left half <> night half Concatenation ! join

•	•	W	ha	t		do	es	•	ŕ	n. N.		ge	•	2נ	rp	<i>Ъ</i> л)) ,	tì v	ne		d	0	6	rh	v		+1	<u>ر</u> ور ا	e	· ·	ar	e	Sþ	lit		in	Ve	22	ìon.	' •	
											• •				• •														•											• •	
					• •	•			•		• •			•	• •				• •			•	•			•			•					• •			•		•		•
•	•	• •		•	• •			•	•	•	• •			•	• •				• •				•	• •		•	• •		•	• •		•		• •	•		•			• •	•
•	•	• •		•	• •		•	•		•	• •	•		•	• •				• •	•			•	• •		•	• •		•	• •				• •		•	•		•	• •	•
•	•	• •		•	• •			•	•	•	• •			•	• •				• •				•	• •		•	• •		•	• •		•		• •			•			• •	
		• •			• •				•		• •			•	• •		•		• •			•	•			•			•				•	• •	•		•				
•	•	• •		•	• •			•		•	• •			•	• •				• •	•			•	• •		•	• •		•	• •				• •		•	•			• •	
•	•	• •		•	• •						• •	•	•	•	• •				• •	•			•	• •		•	• •		•	• •		•		• •						• •	
		• •		•	• •				•		• •			•	• •											•			•				•							• •	
•	•				• •						• •	•	•		• •	•		•									• •			• •		•								• •	
•		• •		•	• •			•		•				•					• •					• •		•	• •			• •				• •						• •	
	•																										• •			• •				• •						• •	
		• •			• •						• •				• •				• •							•				• •				• •						• •	
•	•	• •			• •				•		• •			•	• •				• •				•	• •		•	• •		•	• •		•		• •			•			• •	
•		• •			• •					•	• •			•	• •				• •							•			•	• •				• •					•	• •	•
•	•				• •						• •	•		•	• •				• •				•			•	• •		•	• •		•		• •			•			• •	
•	•	• •			• •				•	•	• •				• •				•				•	• •		•	• •		•			•		•			•		•	• •	
•	•	• •			•					•	• •			•	•				• •				•	• •		•	• •			• •		•		•			•		•	• •	
											• •				• •									• •																• •	

• •	What does	merge	subrontine	do when	there are	split inversions?
· · ·	Consider	mergine	1 3	5 an	d 24	6
• •	· · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · ·	
• •	Output	t i i i i i				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
• •	· · · · · · · · · ·		· · · <u>[· · · · · · · · · · · · · · · ·</u>	·····		
•••						
• •	· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·			
•••						
•••	· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·			
• •	· · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	

What does	merge sul	prontine do 1	then there	are split	inversions?
		1 3 5		246	· · · · · · · · · · · · ·
Muth.t	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
Output	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · ·

What does marge subroutine do when there are split inversions? 6 Consider merging [1 3 5 and 4 Output

What does mange subroutine do when there are split invasions? Consider merging 135 and 246 2 Output - $\sqrt{2}$ by here 2 gets copied in output, the split inversions (3,2) and (5,2) are exposed.

What does mange subroutine do when there are split invasions? Consider merging [135] and 246 1 2 3 Output - $\sqrt{2}$ by here 2 gets copied in output, the split inversions (3,2) and (5,2) are exposed.

What does marge subrontine do when there are split inversions? Consider merging 135 and 246 1234 Output - $\sqrt{2}$ bothen 2 gets copied in output, the split inversions (3,2) and (5,2) are exposed. When "4" gets copied in output, the split inversion (5,4) is exposed.

What does merge subrontine do when there are split inversions? Consider merging 135 and 246 12345 Output - $\sqrt{2}$ - When "2" gets copied in ontput, the split inversions (3,2) and (5,2) are exposed. When "4" gets copied in ontput, the split inversion (5,4) is exposed.

What does merge subrontine do when there are split inversions? Consider merging 135 and 246 123456 Output - $\sqrt{2}$ - When "2" gets copied in ontput, the split inversions (3,2) and (5,2) are exposed. When "4" gets copied in ontput, the split inversion (5,4) is exposed.