· · · · · · · · ·	COL 351 :	ANALYSIS	& Des	IGN of	ALGORITHMS	· · · · · · · · ·
· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·			· · · · · · · · ·
· · · · · · · · ·		LECT	TURE	39		· · · · · · · ·
· · · · · · · · ·	NP- Com	IPLETENE	: [[22,	Тне	CLASS NP	· · · · · · · ·
· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·			
		· · · · · · · · · · ·				
			· · · · · · · ·			
· · · · · · · ·	NOV OF	6, 2024		Rohi	H2HAV T	· · · · · · · ·

•	•	•	•	• •		•	•	• •	· ·	•	•	0	•	A	ľ	l	•	ŀ			j (D	R	1	FH	1 f	1				M	Y S	ST	E	R	Y		•	•		•		•	• •	•	•	•	• •
•	•	•	•	Μ	ìn	im	ί V γ	n	· ·	Ŝ	pc P	hh	ni	n(]		[r	e e e		•	•	••••	•	•	•	•	•	•	•	• •	· ·	-	1,	(A'	vel	jure (7		ີ່ວ່	لنه	e Prr	1. 1. 1.	ņ	Pr	rob	le	γ M	• •
			•	•				•	• •									•		•											• •					• •							•				•	• •
			•	•				•	• •							•		•		•		• •								-											•	•	•					• •
•	•		•	•			•	•	• •						•	•	•	•		•		• •								-						•							•				•	• •
•	•		•	•				•	• •					•		•	•	•	•	•	•	• •	•			•					• •		•	•	•	•		•			•	•	•	• •	•			• •
	•	•	•	•			•	•			•				•		•	•		•		• •	•					•		-						•				•			•		•			• •
•			•	•		•		•	• •							•		•	•	•	•	• •		•						•	• •				•	•		•	•				•	• •				• •
				•				•	• •					•		•				•	•	• •		•							• •			•		• •					•	•	•	• •				• •
	•		•					•	• •							•		•	•	•	•	• •								•	• •				•												•	• •
				•				•	• •					•		•															• •			•	•						•	•	•					
								•																																								
									• •									•																													•	• •
			•	•				•	• •									•		•											• •					• •							•				•	• •
•		•	•	•				•	• •			•	•	•		•	•	•	•	•		• •					•	•	•		• •			•	•	•				•	•	•	•					• •
•	•	•	•	•		•	•	•	• •						•	•	•	•	•	•	•	• •							•	•	•			•	•	•	•	•			•	•	•	• •				• •
•	•	•	•	•		•	•	•	• •			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •		•	٠	٠	•	•	•	•	• •			•	•	•		•	•	•	•	•	•	• •				• •
•	•	•	•				•	•	• •	•					•	•	•	•	•	•	•	• •							•	•	• •			•		•					•		•	• •	•			• •
								•	• •											•		• •								•	• •					•								• •				• •

AN ALGORITHM	IIC MYSTERY
Minimum Spanning Thee	Traveling Salisman Problem
input: an undirected graph $G = (V, E)$	input: an undirected graph $G = (V, E)$
with heal-valued edge cost Ce	with heal-valued edge cost Ce
for each edge e	for each edge e
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

AN ALGORITI	HMIC MYSTERY
Minimum Spanning Tree	Traveling Salisman Problem
input: an undirected graph G=(V,E)	input: an undirected graph $G = (V, E)$
with heal-valued edge cost Ce	with heal-valued edge cost Ce
for each edge e	for each edge e
output: a spanning tree T with	ontput: a tour T with
minimum total cost Z Ce. eET	minimum total cost Z Ce. CET
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

AN ALGORIT	HMIC MYSTERY
Minimum Spanning Thee	Traveling Salisman Problem
input: an undirected graph G=(V,E)	input: an undirected graph G=(V,E)
with heal-valued edge cost Ce	with heal-valued edge cost Ce
for each edge e	for each edge e
output: a spanning tree T with	ontput: a tour T with
minimum total cost 2 Ce. eET	minimum total cost Z Ce. eET
search space : n ⁿ⁻² spanning trees in Complete graphs	search space: $\frac{1}{2}(n-1)!$ on complete graphs
Complete graphs	

AN ALGORIT	HMIC MYSTERY
Minimum Spanning Thee	Traveling Salisman Problem
input: an undirected graph G=(V,E)	input: an undirected graph G=(V,E)
with heal-valued edge cost Ce	with heal-valued edge cost Ce
for each edge e	for each edge e
Output: a spanning tree T with	ontput: a tour T with
minimum total cost Z Ce. CET	minimum total cost Z Ce. eET
Search space : n ⁻² spanning trees in Complete graphs	search space: $\frac{1}{2}(n-1)!$ on complete graphs
algonithms: Prim's, Knuskal's, O(m log n)	algorithms :

•		Ea		ľ	· · ·	•	•	Pv		6	len	m	2	•		י דן	H	۰ ٦	•	þ	oh	1-		Fin	ηe		•	al	go	י רל.	iŦ	hn	1	•	•	• •	•	•	•	•		•	• •		•	•	•	• •	
•	- - - -	10	rd		 	•	P) Ƴ:৩	6	10	m.	2	•	ہ بر	i	Hh	0V0	t	•	0	ny		þ	00	ly	n7	m	10	l-		ti	me	2	• (al	g 0	بر	H	าท	ì		•	· ·		•	•	•		
		•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•				•	J	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•				•	•	•		
•	• •																			•	•														•						•	•						• •	
•	• •												•	•			•		•	•	•	• •						•		•	• •				•	• •					•	•	• •				•	• •	
•	• •			•										•		•	•		•	•	•	• •				•		•		•	• •				•	• •		•			•	•	• •				•	• •	
•	• •	•	•	•									•	•			•		•	•	•			•		•		•		•	• •			•	•	• •					•						•	• •	
•			•	•				•						•		•	•		•		•	• •								•				•	•	• •					•	•	• •				•	• •	
•									•			•	•								•	• •							•	•		•					•				•		• •						
•																																																	
•	• •																				•																											• •	
•	• •																				•	• •									• •				•						•	•	• •					• •	
•	• •		•	•										•			•		•		•	• •									• •				•						•	•					•	• •	
•	• •		•	•									•	•		•	•		•	•	•							•						•	•						•			-				• •	
	•			•	• •				•			•	•			•				•	•	• •					•	•	•	•	• •				•	• •				•	•	•	• •				•	• •	
	• •	•			• •					•	•		•	•		•	•	•	•	•	•	• •						•	•	•	• •				•	• •						•	• •				•	• •	
	• •				• •								•	•			•		•	•	•	• •						•		•	•					• •						•	• •					• •	
	• •																														•										*								

Hard : Problems without any polynomial-time algorithm because one down't exist? because we have failed to find one?	•	· ·	Ea	ч ч ч	· ·		•	r F F) (((((((((((((((((((6	len	20	•	r b	ะ11	h	•	þ	ly Y	•	ti	me			lg	רל 0 ירל 0	ιĦ	hm		•	· ·	•	• •	•	•	• •		•	· ·		•	•
because one down't exist? because we have failed to find one?	•	}	10	rd	· ·	!	•	Pr	ob	le	ms	· · ·	h h	ri	ho	nt	•	Qv	'Y	•	br	ly	n 107	mi	al		tir	ne	•	al	go	نه مرج	th	m N	•	•		•	· ·		•	•
because one down't exist? because we have failed to find one?	•	• •	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	· ·	• •				•	•	· · ·			•	•	• •	•	•	•		•	• •	•	•	• •		•	• •	•	•	•
because one down't exist? because we have failed to find one?	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•			-	••••	•	•	•	• •	•	• •			• •	•	•	•	• •	•	• •	•	•	•		•	• •	•	•	•
	•	• •	b	r'a	zv	se	•	01 101	ne.	Ċ	do	ч	'ŧ	•	ex	ci s	t	?	•	•	•	· · ·	be	ca	usl		we	h	av	e	f	ri	ed	ł	70	f	inc	l	Or		2	•
	•			•	• •	۰		•	• •	•	•	• •	•					• •			•	• •	•	• •			• •	•	•	•		•				•	•		•		•	•
						•																																			•	
												• •			•			• •													• •		• •			•	• •				•	
	•			•	• •			•	• •			•		•				• •			•	• •		• •			• •				• •		• •	•		•	•		•		•	•
											•									•											• •											•
• • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•																																									
	•				• •			•	• •			•		•	•			• •			•	• •		• •			• •				• •		• •			•	• •		•		•	
	•				• •			•	• •	•	•	•		•	•			• •		•	•	• •	•	• •		•	• •	•		•	• •		• •		•	•			•	•	•	*
	•				• •			•	• •			•		•	•			• •			•	• •		• •		•	• •				• •					•			•		•	

•	•	Е	as 1	y	· · ·	•	•	Pre	b	le	n M	2	•		-i {	h	•	þ	0) 0	y -	- +	,in	1e		0	lg	0.)- 0.)-	uŦ	hn	25	• •		•	•	· ·	•	-			Phy	3	• •	
•	•	Н	an	, J		•	P	rol	الاط	lm	י ג	•	י ש	ił	ho	ut		r D	n.	· ·	ĥ		Yr	י 170 א	nÌ	al	•	- 1, i	me				د ۱	∽ ,	th	m	· ·	•	· ·	Ch	Im	ગેડી	Ny
•	•	• •		•	• •	•			• •	•	•	•	•	•			0) (17		٦.		· · ·		•							•	. \			0		E	'on	omi	ic <u>i</u>
•	•	· ·	•	•	• •	•	•	• •	· ·	•	•	•	•	•	•					• •		•					•	· ·		•	· ·		•	•	G	102	me	5	` E	Sio	log	y J	
•	•	b	اع ا	cor	vse		0	ne	· ·	d	0.VS	.n'-	ŧ	•	ex	CÍ (st	?	•	• •		•	Ь	ec	a	use		We		ha	ve		fø		ed	-	to		- Ir	rd	01	ne	2 1
	•		•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•		•	•	•	• •		•	•	•	• •	•	•	• •		•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	· ·	
•	•	•				•		•	• •					•	•		٠			• •				•	• •	•		• •	•	•				•	• •	•	•	•	•	• •	•	• •	
																	•													•													
															•													• •							• •					• •		• •	
	•			•	• •		۰	•		•	•			•						• •		•		•	• •	•		• •			•			•	• •	•	•	•	•	• •	•	• •	
	•					•									•		•											• •					•		• •			•	•	• •		• •	
																				• •					• •			• •			• •				• •	•	٠			• •		• •	• •
	•				• •			•	• •					•	•					• •			٠	•	• •		•	• •			•			•	• •	•	•		•	• •	•	• •	
	•				• •				• •			•	•	•	•			•	•	• •					• •		1	• •			•			•	• •				•	• •		• •	• •

Easy: Problems with	poly-	-time	algorith	ms		- Physics
Hard : Problems without	any	polynon	nial-tim	e algo	rithm	Chemistry Economics
				· · · · · · ·	Games	Biology
because one down't exist	?	bec	ause we	have f	ailed to	find one?
Conjecture [Edmonds '67]	· · · · ·	· · · · · · ·		· · · · · · ·	· · · · · · ·	
Conjecture [Edmonds '67] TSP down't have a poly-time al	go .	· · · · · · ·				
		· · · · · · ·				· · · · · · · · · · ·
				· · · · · · ·		· · · · · · · · · ·

Easy: Problems with poly- Hard: Problems without Any		
because one down't exist?	because we have	Games Biology failed to find one?
Conjecture [Edmonds '67] TSP down't have a poly-time algo. Short of a mathematical proof,	how to amass evid	ence of hardness?

Easy: Problems with pol Hard: Problems without any		gorithm Economics Games Physics Chemistry Economics Biology
because one down't exist?	because we have	failed to find one?
Conjecture [Edmonds '67] TSP down't have a poly-time algo. Short of a mathematical proof Relative hardn		ence of hardness?



"I can't find an efficient algorithm, but neither can all these famous people."

Source: Garry and Johnson (1979)

																	• •																							• •	
									\sim																										ó	•				• •	
									K	1)	11	1	51	Ы	6		Ą.	1	^ A	2.7	F		h	11:	TI	4	. (R (2 1) C :	TI.	0	N.	S						
									-	50					7	. "	. ' .		-						1	•	. •				Ŭ	•			_						
0	•		•	•	•			• •									• •					•					•	• •	•	•			•		•	•				• •	
	•		•	•	•		•	• •									• •		•			•	•					• •	•	•		• •	•		•	•	• •				
																	• •						•					• •								•	• •			• •	
	•		•	•	•	•	•	• •	•		•					•	• •		•			•	•					• •	•	•		• •	•		•	•	• •		•	• •	
					•	•	•	• •			•					•	• •					•	•					• •				• •				•	• •			• •	
						•	•									•							•					• •				•				•	• •			• •	
																												• •								•					
																	• •																				• •			• •	
																	• •						•					• •								•	• •			• •	
						•	•									•	• •											•									• •			• •	
						•	•									•												•				• •				•	• •			• •	
					•	•	•	• •			•					•	• •					•						• •				• •				•	• •			• •	
						•	•	• •			•					•							•					• •				• •				•	• •			• •	
																												• •								•					

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	B	50 1		Ļ	D) []	N	G	•		4	· ·		4 4 1	S E			ہ ا بر	Т	H	 	R	E	Þ	U V V	C	[]	0	ا ا	S	•	•	•	•	• •		•	•	•
•		¥	•	c C	ho	200	e Re		r X	e Q	ŝ	g	e	•	cl	<u>م</u>	2			•	Of	<u>)</u>	(י יסרַ'	m	Þ	n ^t	- A	Hiv	ې ۲	r al	•	þ		61	e er	nl	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·		•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		. U	•	•	0	•	•	•	•	•		• •	•	• •	•	l .	•	•	•	•	•	•	. I . 		•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•				•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	· ·		•	•	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•		•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•
•	•	•	0		•	0	•		0	0	0	•	•	0	0	0	0	•	•	•	•	• •	0 1	• •	0	•	•	0	•	•		•	• •		•	0				•		•	•	•	•			-	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	••••	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	•
•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	• •			•	•		•		•	• •	•	0	•		• •	•	•		•	•	0		•		0	•		•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	· ·	•	•	•	•	•	•		•	• •	•	•	•		· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	• •			•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•
•				0	•	•	•		•	•	•	•		•		•	•	•		•	•	•		• •	•			•	0	•	•	•	• •		•	•	•		•			•		•	0	•	• •		•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	•

· · ·	•	· ·	• •		•	· · ·	•		Bu		L 7		N	G	•	А А С		ر ک	21	E		۱. ۲	T	H	· •	LE	٦v	JC	TI	0	N 2	5 1 5 1	•	•					
• • • • •	ŧ	C	N 0 V	عو	- 0	 	la	nge			2 52			Ç	f	•	ص)	n M	þv	tø	۰ ۱	۰ n	ol	ļ	510	61	em	1	• •			· · ·	n n h	وم	lu	ctin	ייי אינ		•
* * *		Sha	ι 		th	at		S	olv	rin (g J	, 1 1 1 1 1 1	fo	1 1 1 1	L	þ	0	61	em		(e a	- 	T.	s P)	4	ill	Ş	solv	re	a	U	þ	nl	ol m	ડાં	ົກ	C.	•
• •	•	• •		· ·	•	• •	•	0	• •	•	• •	0	0	• •	•	0	• •	0	•	• •	• •		• •	0	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •	0	•					•
• •	0		• •		•	• •		0	• •	•	• •	0	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	• •	0	• •	•	• •	•	• •		•	• •	•	•	• •		• •		•
• •																																							
•					•	• •					• •		•	• •			• •		•	•		•	• •	•	• •		• •		• •	•		• •	•	•	•		• •		•
• •		• •			٠	• •					• •			• •			• •			•	• •			٠			• •	٠	• •			• •		•	• •		• •		•
• •		• •	•		•	• •	•				• •	•	•	• •		•	• •		•	•	• •		• •	•	• •		• •		• •	•		• •			•		• •		•
• •		• •	•			• •			• •		• •			• •			• •			•	• •		•		• •		• •		• •			• •			•		•		•

BUILDING A CASE WITH REDUCTIONS * Choose a large class C of computational problems reduction * Show that solving your problem (eg., TSP) will solve all problems in C. & Problem 2] (Problem 1) >{TSP} EProblem 10,000)

* Choose a large class C of computational problems reduction * Show that solving your problem (e.g., TSP) will solve all problems in C \Rightarrow If TSP is easy, then all problems in C are also easy.		Buil	DING A CAS	LE WITH REDUCTION	SNC
	* Choo	se a large cle	iss C of comp	atational problems	reduction
	* Show	that solving	g your problem	n (eg., TSP) will solv	e all problems in C.
	⇒ I	f TSP is	easy, then all	problems in C are	also easy.
			• • • • • • • • • • • •		
				· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
			· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·

BUILDING A CASE WITH REDUCTIONS
* Choose a large class C of computational problems reduction
* Show that solving your problem (e.g., TSP) will solve all problems in C.
\Rightarrow If TSP is easy, then all problems in C are also easy.
If you are willing to believe that problems in C are "hard",
If you are willing to believe that problems in C are "hard", then you should also believe that TSP is hard.

BUILDING A CASE WITH REDUCTIONS
* Choose a large class C of computational problems reduction
* Show that solving your problem (e.g., TSP) will solve all problems in C.
\Rightarrow If TSP is easy, then all problems in C are also easy.
If you are willing to believe that problems in C are "hard", then you should also believe that TSP is hard.
Bigger the set $C \implies$ stronger evidence for TSP's intractability

						•	• •											 									• •									1 1		1.1			· /	
										0				_		• •	n .	•				~ /			.	•		-														
										C	H	0	0.	2	(h	76	۵.	A	C	1	R	7.7	•	. t	-0	R			12	1												
																	٦.							. •	. –																	
						•																		•																		l
						•																																				1
															• •																				• •			1				1
				•		•	• •		•				•	•	• •					•				•	•	•	• •	•				•	•	•	•					•		
				•	•	•	• •	•	•				•	•	• •			•		•			•		•	•	• •	•	•			•	•	•	•					•	•	•
				•	•		• •						•	•	• •								•	•	•	•		•					•	•	•	1				•	•	
					•									•											•	•							•				•				•	
				•	•	•	• •							•	• •										•	•									• •	- 1		•		•	•	
																								•																		
						•																																				
			•	•	•	•	• •	•					•	•	• •							•	•		•	•	• •	•				•			•					•		ľ
					•									•	• •										•		• •								•						•	1
				•										•	• •								•		•	•	• •						•		•						•	•
•				•	•	•	• •							•	• •								•		•	•	• •						•		•					•		
•			•	•	•	•	• •	•					•	•	• •							•	•	•	•	•	• •	•				•	•	•	•			•		•	•	
•				•		•	• •						•	•	• •										•	•						•			•			•		•		

Why not choose C = ALL computational problems?		CHOOSING	A CLASS FOR TSP	
	Why not	chouse C =	= ALL computational	problems?
	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•			C	K	0	0.	S	1	10	j		Ą	•	Ċ	Ų	ĄS	22		F	Ō	R		T	Ž	P :	•	•	•			•	•	•	•	•	• •		
•	•	•	•	•			ny	•	۲ ۲	۰ ١0	t	•	Ċ	ht	ט ט(} 2			C	• •	-		•	A	Ll	•	•	Ċ	0 7 1	γþ	n	ta	tie	Ο Υ Υ	12	l	þ	י הייני נ	0 6	il e	m	י נ	۲ ۲)	•	•	· ·	•	•
•	•	•	•	•	· ·	To	0	•	0 (2) 1	r M	bi	iti	io	N.	2		•		1	In	, J		d.	25	•	t	ħ.	r e e	•	Н	A	L L	τI		IG	•	þ	۰ ۲۲	1 	en	n e	· · · ·	•	0	•	•	· ·	•	
	•	•	•	•		•	•	•	•		•	•		•	•					•	•	•	•	•	•	•	•				•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•		• •	•	
•	•	•	•	•						•	•			•	•	•	•		• •								•	•							•			•	•			•		•	•	•	• •	•	
•	•	•	•	-				•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		• •		•							•						•	• •			•	•	• •	•			•	•	•	• •	•	•
•	•	•	•					•		•	•	•	•	•	•	•	•		• •		•							•				•							•	• •				•		•	• •		
•		•							•	•	•	•	•			•	•		• •									•											•					•	•	•	• •		
																									•	•																							
																		,																															
																•																																	
				•																															• •							•			•	•	• •	•	
				•							•	•					•												•						•							•			•	•	• •	•	
		•		•		•			•	•	•	•					•		• •						•			•	•		•			•	•				•	• •		•		•	•	•	• •	•	•
•	•	•	•	•				•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		• •									•	•		•				•				•	• •				•		•	•		
•	•	•	•			•			•		•	•	•	•	•	•	•		• •	•					•	•			•		•			•	•				•	• •						•	• •		
•							•		•				•				•		• •										•		•								•								• •		

CHOOSING A CLASS FOR TSP Why not choose C = ALL computational problems? Too ambitions! Includes the HALTING problem. "Given a program, deturnine whether it goes into an infinite loop or eventually halts."

CHOOSING A CLASS FOR TSP
Why not choose C = ALL computational problems?
Too ambitions! Includes the HALTING problem.
"Given a program, determine whether it goes into an infinite loop or eventually halts."
(Twing, 1936) HALTING problem is undecidable.

CHOOSING A CLASS FOR TSP
Why not choose C = ALL computational problems?
Too ambitions! Includes the HALTING problem.
"Given a program, determine whether it goes into an infinite loop or eventually halts."
(Twing, 1936) HALTING problem is undecidable.
cannot be solved by a computer in any finite amount of time (not even exponential, or factorial,)

ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

By A. M. TURING.

				•		•		•		•					•		•		• •			•			
	• •			• •		• •				• •							• •		• •			• •		• •	
	• •			• •		• •		• •		• •							• •					• •		• •	
					,				-		-		,							-					
																					-				

· · ·	ON C	OMPUI				ITH AN NGSPROE	APPLICATIO CLEM	ON TO	· · ·
• •	•			By .	A. M. Tu	URING.			• •
	Birth	பி ப		· · · · · · · ·	· · · · · · ·			 	· ·
. <u>A</u>		vT w	mpnic	zume					• •
*	Formulate	et Tar	ing mac	hines –	- formal	model of	genuel - purpose	computer	د بر د
• •						model of problem.	· · · · · · · · · · · ·	computer	
• •							· · · · · · · · · · · ·	computer	

· · ·	ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM	
• •	By A. M. TURING.	
• •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
*	Birth of computer science	
• •	Formulated Taring machines — formal model of genual-purpose compute	15
*	Showed undecidability of HALTING problem.	· · ·
Tł	hus, computer scientists have been aware of computers' limitations	

•	· ·	· ·	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	C	10	0	s S	11	16	Ì	ł	Ą	. (CL	A	22		F	ò,	2	٦	2- 2-	P	• •	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	••••	
•	· ·	· ·	•	•	ь Г	Jhi	J	. \	∩0 ∩0	t	•		0	י 2 ט	e	•		• •	• •	•	. /	Al	Ļ		C	on	γþ	nt	at	<u>`</u> 0	n G	j J	• •	þ?	0	61	en	۲ ۲ ۲	· · ·	7	•	•	•	· ·	•
•	• •	· ·	•	•	•	••••	•	•	•	•	•	•	•••	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	· ·	•
•	• •	· ·	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•••	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•••	•	•		· ·	0	•		•	•	• •	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	•••	
•	• •	· ·	•	0	•	• •		•	•	•	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•••	•	•	•	•••	•		• •	•	•	• •	•	•	•	•	•	•••	•	•	•	•	• •	
•	• •	· ·	•	•	•	••••		•	•	•	•	•	•••	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	••••	•	• •	· ·	•	•	• •	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	••••	•
	• •		•	0	•	• •					•		• •	•	•		• •		•	•		•	• •	•			• •				•		• •	•		0		•	• •				•	• •	
•	· ·	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•••	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	••••	
•	• •	• •	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•••	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•••	•	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	•••	
•	• •	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	••••	
									•	•	•	•		•		0	• •		•	•			• •				• •									•	•							• •	

• • • •		· · · · ·	Ch	DOSING A CLA	A2T ROT 224	
· · · · ·	· · ·	Why	not chou	se $C = ALL$	computational problems?	
		Som	ne problems	(e.g., HALTING)	can't neduce to TSP.	
					because TSP is solval	de
		· · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	in finite time via	
					exhanctive search	
• • • •						

• •	•	•	•		•	•	• •		•••	C	H	0 (2(IN N	G	••••	Ą	. (CL	ÂS	22		Fo	R	· •	27	P	•	•	• •	•	•	· ·	•	• •	•	· ·	•
• •	•	• •	•	W	lhi	1	n	ot		ch	้อง	se			. <u>-</u>	 	•	Al		•	CO	m	þ	ta	tio	na	al j	ŀ	۰ ۲۱	06	ler	nS		7 .	• •	•	· ·	•
• •	•	• •	•			-			rrol																								· ·	•	• •	•	· ·	•
· ·	•		1		· ·	C	11	-	al	L L	þ	rol	olu	ml	· · · ·	th	at		(A1		Ь	e	S	ol\	red		by	ę	-X	ha	ι ν ς	+i,	ve	2	عما	nh	· · ·	•
•••	•	• •	•	• •	• •	•	•••			•	•	· ·	•	· ·	•	••••	•	•	•••	•	· ·	•	•	· ·		•	• •	•	•	• •	•	•	· ·	•		•	••••	•
												• •		• •																								
• •		• •	•			•	• •		• •		•	•••	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	•		• •		•	• •						• •	•	• •	•	• •	
										•																										•		
		• •	٠					-						• •				٠	• •											• •					• •			
• •		• •		•	• •				• •	•	•			• •	•	• •		•	• •		• •	•		• •			•	•	•	• •	•	•			• •		• •	
		• •	٠					-						• •				٠	• •											• •					• •			
		• •	٠		• •		• •		• •		•			• •	•	• •	•	•	• •		• •			• •	•					• •		•	• •		• •		• •	
	•																	•		•				• •												•		

•••	•	•	• •	 •	•	• •	• •	•	•	. (C	10	0	S	١Ņ	10	Ĵ	• [Ą	•		A	21	2	ŀ	FO	R	•	Ţ	f 2		•	• •		•	•	•	•	• •	•	•	• •	•
• •	•	0	• •	Jł	ių 1	• •	n	st	•	J	nŋ	י 2 ט	e	•		• •	-	•		Al		· ·	c C	<u>่</u> 101	mf	2 N c	te	die) γ	jaj		þ	YŪ	6	ev	ns	• • •	17	• •	•	•	•••	•
· ·	•	•	• •		-				rol																												•	•	· ·	•	•	• • • • • •	•
· · ·	•			•			()	•	i N	U		þY	06	10	ms	•••	t	hø	a+	•	6	i M	•	be		2	oli	V Que	Ļ	6	1	e e	×	na	NÇ.	ti'	ve	•	٢٢	O'r	ıh	· ·	•
· ·	•	•	• •	 •	•	• •	• •	•	•	••••		•	•	•	• •	· ·	•	- - (•	· ·	· ·	•	•	•	•	••••	•	•	· ·		•	• •		•	•	•	•	· ·	•		••••	•
			•	0		•	• •	•		• •		•	•	0	• •		•	0				_		he	٥	Ċ	10	155	•	Ν	P	•	•		•	•	0	•	• •	•		• •	•
		•	• •	 •		•	• •		•	• •				•				•			• •					•				• •		•	•				•		• •	•		• •	
0 0	0			 •			• •		0	• •							•	0			• •					•				• •										•	•		
• •																											• •			• •									• •			• •	
• •		•	•			•	• •			• •			•	•	•			•	•	•	• •			•	•	•	• •		•	• •			•		•	•		•	• •			• •	•
	•				•									•																	•	•											

•	•	· ·	•	•	•	T	74	R	E	E	•		۲Y	1	PE	2	•	0	P	•	C	, 0	r	1 P	ν	T	Â	T	10	N	A	L	f	> _R	20	B	L	E	M	S	· ·	•	•	· ·	
•	•				•	• •			•			•	• •			•	•	• •					•	•	• •	•				• •			• •				• •			•	• •	•	•		
•	•	• •	•		•	• •			•	•	•		• •				•	• •		•			•	•	• •	•	•		•	• •			• •	•		•	• •		•		• •	•	•	• •	
•	•	• •			•	• •			•		•						•	• •						•						• •				•		•	• •		•						
•	•				•	• •		•			•	•	• •				•			•					• •		•	•	•								• •			•					
						• •																								• •			• •												
•																														• •													•		
•						• •						•						• •												• •							• •					•			
•		• •				• •					•	•	• •					• •					•		• •					• •			• •				• •					•		• •	
•	•					• •												• •					•							• •			• •		•							•		• •	
•	•					• •												• •					•							• •			• •		•							•		• •	
•	•	• •				• •			•			•	• •					• •					•	•	• •					• •			• •				• •			•	• •	•		• •	
•	•	• •				• •			•			•	• •					• •					•	•	• •					• •			• •				• •			•	• •	•		• •	
•	•	• •		•	•	• •	•	•	•		•	•	• •				•	• •	•	•			•	•	• •		•		•	• •			•			•	• •	•		•	• •		•	• •	
•	•	• •				• •		•	•	•	•	•	• •				•	• •		•			•	•	• •		•		•	• •			•			•	• •			•	• •			•	

	• •	•	•	0	•	T	H	R	E	E	•	٦	٢٧	I F	PE	2,5) f	C		C	0	2	11	PU	7	A	T	710	10	1 <i>F</i>	łL	•	P	R	D	B	L	E	1	15	•	•	•	•		
•	· ·	Ĵ)ea	٢Ì	210	2 1 1 1 1	•	Pre	56	le	- 	· ·	· ·)) v	tp		t	•	ų ų	وح	/.		f	•	th	J.	e	0	21	•	A	 	fe	يم	sil	- 	e		202	14	(†	ว่ง ว่ง	r) I	•	•	· ·	
•	••••	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	• •	• •	• •	0	۱۴	d	.н Ч - -	ľ	10))			1	he	, 人	4	21	e	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	 	
•	• •					•	•	•	•		•	• •		•		•	0	•	•			•		•				• •	•	•	•				•		•	• •			•		•		•	•		
			•		• •	•	•	•	•					•		•	•	•	•	•	•		•	•	•			• •			•	•			•		•	• •			•		•	•	•	•		
	• •						•			•		• •				•												• •				•													•	•		
																		•				•														•												
•	• •			•	• •											•	•	•										• •				•													•	•		
																						•																										
							٠					• •					٠											• •																				
•	• •		•	•	• •		•		•					•		•	•	•		•	•	•	•		•	•		• •	•	•	•			•		•	•			•				•	•	•		
					• •																																											
					• •																							• •																		•		
•	• •			•	• •				•	•	•									•	•	•	•		•	•		• •				•				•	•								•	•		
•	• •			•	• •			•	•	•	•	• •			•	•	•	•			•	•	•	•	•	•		• •	•			•					•	•		•		•	•		•	•		
•	• •			•	•			•	•	•		• •			•	•	•	•				•		•				• •			•			•	•	•	•									•		

• •	Π	IREE TY	IPES OF COMPUTATIONAL PROBLEMS	• •
• •	Decision	Problem :	Output "Yes" if thue is a feasible solution	
• •	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	and No otherwise.	•••
• •	e.g., je	there a	TSP town of cost ≤ 100 ?	••••
•••	· · · · · · · · ·			• •
•••				• •
· ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	no need to actually	· ·
• •	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	produce a tour if one exists	• •
• •			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
0 0 0 0	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• •
• •	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·		• •

THREE TYPES OF COMPUTATIONAL PROBLEMS	
Decision Problem : Output "Yes" if thue is a feasible solution	· · ·
and No otherwise.	
e.g., is thue a TSP town of cost ≤ 100 ?	· · ·
Search Problem : Output a feasible solution if one exists,	· · ·
and "no solution" otherwise	• • •
	• • •

	THREE TYPES OF COMPUTATIONAL PROBLEMS														
	Decision Problem : Output "Yes" if thue is a feasible solution														
	and No otherwise.														
	e.g., is thue a TSP town of cost ≤ 100 ?	•													
	Que l Parthe : Outhat a foosible colution if one existe														
	Search Problem aupul a Teasible solution of one cases,														
· ·	Search Problem : Output a feasible solution if one exists, and "no solution" otherwise	•													
	e.g., return any TSP tow of cost < 100, if one exists.														
	and no solution otherwise														
	and no solution otherwise														
	and no solution otherwise														
	and no solution otherwise														
	and no solution otherwise														

THREE TYPES OF COMPUTATIONAL PROBLEMS
Decision Problem : Output "Yes" if thue is a feasible solution
and "No" otherwise.
e.g., is thue a TSP town of cost ≤ 100 ?
Search Problem : Output a feasible solution if one exists,
and no solution otherwise
eg, netwon any TSP town of cost ≤ 100 , if one exists.
Optimization Problem : Output a feasible solution with best-possible
Objective function value (or "no solution" if none exist)
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

THREE TYPES OF COMPUTATIONAL PROBLEMS
Decision Problem : Output "Yes" if thue is a feasible solution
and No otherwise.
e.g., is thue a TSP tow of cost ≤ 100 ?
Search Problem : Output a feasible solution if one exists,
and "no solution" otherwise
e.g., networ any TSP tow of cost ≤ 100 , if one exists.
Optimization Problem : Output a feasible solution with best-possible
objective function value (or "no solution" if none exist)
eg, netwon the min cost TSP town

TH	IREE TY	PES OF (COMPUTATIONA	L PROBLEMS											
Decision				feasible solution											
Search Pr	roblem :	and "No" otherwise. Output a feasible solution if one exists, and "no solution" otherwise													
Optimization				with best-possible											
· · · · · · · · · · · · · · ·				solution if none exist?											
· · · · · · · · · · · · ·															
			· · · · · · · · · · · · · · · ·												
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·											
			· · · · · · · · · · · · · ·												

THREE TYPES OF COMPUTATIONAL PROBLEMS
Decision Problem : Output "Yes" if thue is a feasible solution
and No otherwise.
Search Problem : Output a feasible solution if one exists, and "no solution" otherwise
Optimization Problem : Output a feasible solution with best-possible Objective function value (or "no solution" if none exist
Note: every optimization has a natural search version,
e.g., TSP tow with cost ≤ 100 ,
Knapsack solution with value 7/100, etc.

THREE TY	IPES OF COMPUTATIONAL PROBLEMS
	Output "Yes" if thue is a feasible solution and "No" otherwise.
	Output a feasible solution if one exists, and "no solution" otherwise
Optimization Problem :	Output a feasible solution with best-possible tive function value (or "no solution" if none exist?
Search reduces to	optimization : easy! (Exercise)

THREE TYPES OF COMPUTATIONAL PROBLEMS
Decision Problem : Output "Yes" if there is a feasible solution and "No" otherwise.
Search Problem : Output a feasible solution if one exists, and "no solution" otherwise
Optimization Problem : Output a feasible solution with best-possible Objective function value (or "no solution" if none exist?
Search reduces to optimization : easy! (Exercise)
Optimization neduces to search : via binary search (Exercise)

	THREE TY	IPES OF (COMPUTATIONA	L PROBLEMS	
Decision	Problem :	Output "Yes"	if thue is a	feasible solution	· · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	and No"	otherwise.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
Search	Problem	Output a	feasible solution	if one exists,	· · · · · ·
		•	ution" otherwise		
Optimizatio				with best-possible	· · · · ·
· · · · · · · · · · ·				solution" if none	
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·			· · · · · ·
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · ·
 	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·

THREE TYPES OF COMPUTATIONAL PROBLEMS
Decision Problem : Output "Yes" if thue is a feasible solution
and "No" otherwise.
Search Problem: Output a feasible solution if one exists, and "no solution" otherwise
Optimization Problem: Output a feasible solution with best-possible
Objective function value (or "no solution" if none exist
NP: commonly defined for decision problems
we will define it for search problems

	THREE TYPES OF COMPUTATIONAL PROBLEMS
Decision	n Problem : Output "Yes" if thue is a feasible solution and "No" otherwise.
Search	Problem : Output a feasible solution if one exists, and "no solution" otherwise
Optimizatio	on Problem : Output a feasible solution with best-possible Objective function value (or "no solution" if none exist
	NP: commonly defined for decision problems
· · · · · · · · · ·	we will define it for search problems
· · · · · · · · · ·	technically, functional NP (FNP)

							•			1	•					•					•			•		•		•		•		•		
													-	-			• •				16	5												
		•		• •							• •		7	H	•	. (L	А	77	P	N ľ			• •		• •		• •		•				
				•							• •					• •			• •		• •			• •		• •								
		• •		• •				•		•	• •					• •			• •		• •					• •		• •	•	• •		• •		
		• •		• •				•		•	• •					• •			• •		• •			• •		• •		• •	•	• •		• •		
		• •		• •		•		•	•	•	• •					• •			• •	•	• •			• •		• •	•	• •	•	• •		• •		
		• •		• •				•			• •					• •			• •		• •					• •		• •		• •	. •	• •		•
	•	• •		• •				•		•	• •			•		• •				•	• •					• •	•	• •	•	• •		• •		•
	•	• •		• •				•		•	• •			•		• •				•	• •					• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •				•			• •					• •			• •		• •					• •		• •		• •	. •	• •		•
	•	• •		• •				•		•	• •			•		• •				•	• •					• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •				•			• •					• •			• •		• •					• •		• •		• •	. •	• •		•
	•	• •		• •				•		•	• •			•		• •				•	• •					• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •		•		•		•	• •			-		• •			• •		• •					• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •		•		•	•	•	• •					• •			• •		• •			• •		• •	•	• •	•	•		• •	•	
		• •		• •		•		•	•	•	• •					• •			• •		• •			• •		• •	•	• •	•	•		• •	•	
		• •		• •		•		•	•	•	• •					• •			• •		• •			• •		• •	•	• •	•	•		• •	•	
		• •		• •		•	• •		•	•	• •	•			•	• •		•	• •	•	• •			• •		• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •		•		•	•	•	• •					• •			• •		• •			• •		• •	•	• •	•	•		• •	•	
		• •		• •		•	• •		•	•	• •	•			•	• •		•	• •	•	• •			• •		• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •		•	• •		•	•	• •	•			•	• •		•	• •	•	• •			• •		• •	•	• •	•	• •		• •		•
•		• •		• •		•				•	• •	•				• •			• •		• •			• •		• •	•	• •	•	• •		• •		•
	•	• •		• •	•	•		•		•	• •					• •				•	• •					• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •		•	• •		•	•	• •	•			•	• •		•	• •	•	• •			• •		• •	•	• •	•	• •		• •		•
•		• •		• •		•				•	• •	•				• •			• •		• •			• •		• •	•	• •	•	• •		• •		•
	•	• •		• •	•	•		•		•	• •					• •				•	• •					• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •		•	• •		•	•	• •	•			•	• •		•	• •	•	• •			• •		• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •		•	• •		•	•	• •	•			•	• •		•	• •	•	• •			• •		• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •		•	• •		•	•	• •	•			•	• •		•	• •	•	• •			• •		• •	•	• •	•	• •		• •		•
		• •		• •		•		•		•	• •			-		• •			• •		• •					• •	•	• •	•	• •		• •		•
		•		• •						•	•					•			• •		• •			• •		•		• •		• •		• •		
		•		•		•				•	•					• •			• •		•		•	• •	•	•	•	• •	•	•		• •	•	
		•		• •						•	•					•			• •		• •			• •		•		• •		• •		• •		

· ·	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	-	T	H	E	•	C	L	A	.2	2	· ·	N	P	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	· ·	•	•	· ·
· · ·	•	R	ور	al	l	0	W ^h		9	9 P	Į	•	•	•	T	D	. (de	f	in	C	•	ł	h	e	(clo	۹٤.	2	0	f	ţ		701	, ı	L M	مد		2	ol	VI VI	on k	-1e	-	•	· · ·
• •	•	· ·	0	•	•	• •	•	•	•	•	•	•			• •					•			•	•	•		51				• •	•	0	•		•	• •	•	0	0		•	• •	0	•	•••
• •	•	• •		•		• •	•	•	•			•	•	•	• •		•		•	•	•	•	•	•					•	•	• •		•	•	•		• •		•	•	•	•	• •		•	• •
• •		• •				• •									• •						•			•	•														•		•	•	• •	•		• •
• •	•	• •	•		•	• •	•			•	•	•	•	•	• •		•			•	•	•	•	•	•					•	•	•		•	•	•	•		•		•		• •			• •
• •						• •	•				•				• •		•			•	•	•	•	•					٠			•		•	•	•	• •				•		• •			• •
• •																								•							•												• •	•		• •
• •		• •				• •														•	•	•	•	•	•						•				•	•	•		•		•	•	• •			• •
• •		• •			•	• •	•							•	• •		•			•	•	•	•	•	•			•			•			•	•		•		•		•	•	• •			• •
• •		•			•	• •	•			•	•			•	• •		•	•		•		•	•	•	•						•				•	•	•				•	•	• •			• •
• •		• •			•	• •	•		•					•	• •		•		•	•	•	•	•	•	•						•				•		•				•		• •			• •
• •	٠	• •			1	• •				1	•	٠	1		• •					•	•		1	•	•					1	• •					•	•						• •			• •

			Th	22AJJ 3	NP			· · · ·
	Recall own	goal	: To de	fine the	class of pr	obleme	solvable	
· · · · ·	· · · · · · · · · · ·			exhaustive		· · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	
· · · · ·		· · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · ·
· · · ·				0	necessary	TI Se	NE K	
	Problem	VIA	naive e,	chanstive s	earch (· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	
· · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	

•	•	•	•	•	•	•	•	•		• •	•	•	•	•	•	•	•	•	T	H	E	•	C	Ŀ	A	22	2	1	1	P	• •	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	
•	•	•	•	•	•	•	•	, , , ,	<u>л</u>	<u>)</u> -	•	, F	- - -{	fi	cì	en	t	•	ne		7 9	ni	ti	ึ จัγ	۱.	0)-f	•	2	LL -	eq.	ed	•	2	0	u-	hit	n N	2	•	•	• •	•	•	•	•	• •	
•	•	•	0	0	•	•	•	•		• •	0	•			0	•	•	0	••••	•	(J	•	•	•	• •	• •	• •	0	•	•		•	0	0	0	• •	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	0
•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	• •		•••	•	•	•	••••	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	• •	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	- ·	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	• •	•••	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	
•	0	0	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	· ·	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	•	•	0	•	•••	•	•	•	•	• •	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	- ·	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	· ·	· ·	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	· ·	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	• •	•••	•	•	•	· ·	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	
•	•	•	•	•	•		•	•	• •	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	•	• •	••••	• •	•	0	•	• •	•	•	•	•	• •	•	•	•	0	•	• •	•	•	•	•	• •	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	• •	· ·	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	

· · · · · · · · · ·	· · ·	0	• •	• •	• •	• •	T	ΗE	, (CU	22/	1	JP NP		• •	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	•	• •	• •
· ·	-) -	Ē	- -ffi	cien	nt i	re	ယ၅	nit	า้จา	0-	F	atl	وح و را	d	02 02	lut	า้งท	۵. ۵. ۵.	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	· · ·	
		5	3			7					5	3	4	6	7	8	9	1	2				•	• •	
· · · · · · · · ·		6			1	9	5				6	7	2	1	9	5	3	4	8				•	• •	• •
· · · · · · · · ·			9	8					6		1	9	8	3	4	2	5	6	7	•			•	• •	
e.J.,		8				6				3	8	5	9	7	6	1	4	2	3	•			•		
		4			8		3			1	4	2	6	8	5	3	7	9	1	•					
		7				2				6	7	1	3	9	2	4	8	5	6	•			•		
			6					2	8		9	6	1	5	3	7	2	8	4					0 0	
					4	1	9			5	2	8	7	4	1	9	6	3	5	•			•		
						8			7	9	3	4	5	2	8	6	1	7	9						
· · · · · · · · ·			• •	0 0		• •	0 0	0 0	• •	· · ·	· ·	• •	• •	0 0		0 0	0 0	0 0	• •	•	• •		0	• •	

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•		•	-	ľ	H	le		•	(C	l	J	ł	.2	2	•	ľ	J	P	•		- 0 0	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•		, , ,	•	•	•		•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•			- ' - '	•		L . (ff		cì	e,	n .	t	•	ŋ	r J	C	0°	- 11	n	1	h	٦ م	η		0 0	0-	f		Q	IJ	و	9	P	d	•	0	2	5 	u	ł	0	ņ	2	•			•	•	0		0	0	0	0	•	•
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		2 2 2	•	•	•		•	•	•		•	J	•		0	•	•		0	•	0		•	0	•	J	0	•	•	•		•	•	•	•	0	•	•	•	2 2 2	•	•	•		•	0	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•		•	•	•		•	•	•		•	•	•		•	•	•		•	•	•		•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•			•	•	•		•	•	•	•	•	•
•	•	•	e	. 9			•	•	c c	'h	e	ck	Lir	g			W	rł	الر	H	ht	برم			0	•	•	V			Ż	>		, J	-		, €	•	∛	0	5			7		V 2			, ,	•	, , ,	• •		7	≯.	Ň	۱ ۲	-	•	•	•	•	•	•
				V	-									11															>						- 1																													
•	•	•	•			•	•																																											•	•	•			•	•	•		•	•	•	•	•	•
•	•	•	•			•	• • • •		•																																									•	•	•	•		•	•	•		•	•	•	•		•
· · ·	•		• • • • •			· · · ·																																												•	• • • • • •	•	· · ·		•	•	•			•	•	•		•
•	• • • • • • • • • •				• • • • • • • • •																																															•	· · · ·		• • • • • • •							•		
	* * * * * * * * * * * * *																																																				· · · · ·											

•	•	•	•	•	•	•		· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	-	Ī	H	E	•	C	-L	A	2.	2	· ·	N	IF) 	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	 •	•	•
•	•	•	•	•	•	A		Se	or C	ch	-	þ	ΥĈ	ہ ط	le	η ηΛ	•	ł	,e	(0 1	n N (g s	•	t	י ס נ		th	e	· ·	c))	۱þ	10	хì	fr (- -	C	la	د <u>ر</u> د	י ר ר	.∱	JF		i ji i	i f	•	•	 •	•	•
•		•		•			•			•		•	•			•				•		•		•		•	•	•						•		•		•	•					•	•	•	•	 •		•
				•												•												•								•						•			•		•			
			•						•	•		•		•										•																								•	•	
																											•																		•	•				
																																											÷		•	•				
•		•			÷																				÷		•	•														•		•	•	•	•			
•		•		•		•	•		•	•		•		•										•		•	•	•								•	• •	•				•	•	•	•	•	•	 •	•	
•		•		•		•			•											•		•					•	•					•	•		•	• •								•	•	•		•	•
	•			•		•																•					•	•						•		•	• •						•	•	•	•	•			
•				•																								•								•						•			•		•			
•		•	•		•	•	•																		•		•		• •																•	•				
			•																																															•

· · · · · ·	THE CLASS NP
· · · · · ·	A search problem belongs to the complexity clacs NP if
	For every instance of the problem, every candidate solution
· · · · · ·	has description length (in bits) bounded above by a polynomial
 	function of the input size.
· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

· · · · ·	THE CLASS NP
· · · · ·	A search problem belongs to the complexity class NP if
	For every instance of the problem, every candidate solution
· · · · ·	has description length (in bits) bounded above by a polynomial
· · · · ·	function of the input size.
· · · · ·	e.g., any sequence of vertices is of polynomial size
· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · ·	

	THE CLASS NP
	A search problem belongs to the complexity class NP if
	For every instance of the problem, every candidate solution
· · · ·	has description length (in bits) bounded above by a polynomial
· · · · ·	function of the input size.
	e.g., any sequence of vertices is of polynomial size
2	For every instance and every condidate solution, the feasibility
	of the solution can be confirmed or denied in time
· · · ·	polynomial in the input size.

	THE CLASS NP
	A search problem belongs to the complexity class NP if
	For every instance of the problem, every candidate solution
	has description length (in bits) bounded above by a polynomial
	function of the input size.
· · · ·	e.g., any sequence of vertices is of polynomial size
2	For every instance and every condidate solution, the feasibility
	of the solution can be confirmed or denied in time
	polynomial in the input size.
	e.g., checking validity of a sequence of vertex possible in poly time

•	•	0	•	•	•	•	•	0	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	0	-	F	11	E	•	C	-1	Â	2	2	•	1	11	P	• •	•	•	•	•	•	•	•	- ·	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	•
•	•	•	•	•	•	A	•	2	٥	vc	h	•	þ	rD	اط	le	m M	•	b	e	(o	na C	2 2 2	•	ł	0	•	-H	ne Ne	•	C C	0 Or	n	ole	2X	†i (y J	, , ,	J	ን የ	ک.	- ·	N	P	•	ìf	י <u>ר</u> - -	•	•	•	••••	•
0	•		•		•	•	•		•	•			•	•	•	•	•	•	it	•	r C	Q1	ר ה ל	•	6	י א ר	•	2	0 0	v V	d	•	b	Y	0		•	•	•		•		•	•	•	•	•	•	•	•	· ·	
•	•	•	•	•	•	•	•	N N	0	n M M	d e	t	وم		nì	n	۶ گ	ł	۰ ۲	•	-	ļ Ņ	بر ار	in (Υ Υ	'n	A L	ħ	ñ'n	e e	•	ι Ìr	1		2 ₀	ly J	'n	ΟY	າ ກໍ່ເ	al	 	ł	iņ	ne N		•	•	•	•	· ·	•
							•				•			•	•	•							•					•				•	•								•	•						•	•			•
									•	•				•																			•								•											
•					•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•		•												•	•							•	•	•						•	•		• •	
				•	•	•	•		•	•	•		•	•		•		•	•	•		•			•			•			•	•	•				•			•		•						•	•		• •	
-	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•					•	•	•				•	•	•	•	•	•	•							•		• •	
•		•		•			•	•	•	•	•	•	•	•	•						•		•	•		•	•			•	•		•	• •		•	•		•	•	•	•			•						• •	
							•		•	•																					•	•	•	• •					•	•			•							•	• •	
							•		•	•																						•		• •					•						•						• •	

•	••••	•	•	• •	•		• •	•	•	••••	•	•	•	• •	•	F H	IE	•	C	·L	A S	22	•	N	P	· · ·	•	•	••••	•	•	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	• •	•	
•	· ·	•	•		<i>H</i>	92	2	ıch	•	þr	ob	le	n M N	· · ·	9e	ί σγ	ng j		ł	D D	Ŧ	he	•	СО	m	þÌ	exi	ty (•••	Ċ	6	د		NF		.)	f	•	•	•	•	
•	· ·	•	•	• •	••••		· ·	•	•	· ·	•	•	•	it it			yN	•	be		2	0	v V e	d	b	، بر را	A A		· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· · ·	•	•
•	• •	•	•	• •	• •	N	0 Y	nd	et	er,	m																		y Y	ا ر ا	mi	a	· ·	ti	m	و	• •	•	•	• •	•	•
•	· · ·	•	•	• •	••••		· ·	•	•	· · ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·		J	•	· ·	•	•	· ·	•	• •	•	•	v ·	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	• •		•
•	•••	•	•	• •			•••	•	•	•••	•	•	•	•••	•	•	••••	•	•	•	•••	•	•	• •	•		•	•	•••	•	•	•	••••	•	•	•		•	•	•••		
	• •		•	• •			• •	•		• •	•	•	1	P	•	5	ŧ	•		N	ot		ŀ	0	y	ή¢	m	ip	l	•	•		• •	•				•	•	• •	•	
•	• •	•	•		• •		• •	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	• •		• •	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	· ·	•	
•	• •	•	•	•			• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•		•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•
	• •	•	•	•		•	• •		•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	0	• •	•	0	• •	•	• •	•	•	• •		•	•	• •		•	0	• •	•	•	• •	•	
•	• •	•	•	•			• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	0	•	• •	•			•	• •		•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•

						•								•				• •													1.1					1	1
								e								_		ò.										0									
								Ŀ	:X	A	M	P1	F	. .	D	-		r	R () P	XI.	.E	M	1C		J .	-N										
										• • •			~~	<u> </u>									۰.	· -													
																•																					
0				•	•	• •												• •				• •							•	• •			•				Î
																									• •												1
				•	•	• •				• •								• •				• •			• •					• •			•	• •			
										• •				• •				• •				•			• •	•							•	• •		•	
										• •				• •			•					•			•								•	• •			
				•	•	• •	•			• •				• •			•	• •				• •	•		• •			-	•	• •			•	• •		•	
										•				•			•	• •				•			• •					• •	•			• •		•	
				•	•	• •				• •				• •			•	• •				• •			• •			-		• •			•	• •		•	•
						•				• •				• •			•					• •			• •						•			• •		•	•
					•					• •				• •								• •			• •									• •			
						• •																			• •						•						•
																•																					
																																					ĺ
														• •				• •												• •							
														•				• •							• •					• •							
																																					4

		F	XAMPIEC	0F	PROBLEMS	NP	 	
		· · · · •			I RUBLERIS	1.41.	 	
	Search	Mucion	of TSP					
\bigcirc		V O GLUOIN	of TSP					

•	• •	•	•	•	•	• •		•	•	•	E	X/	41	1	PL	E	2		0	P	•	P	R	0	Bl	_6	EN	1	2		N		١	P	• •	•	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•
	$\widehat{\mathbf{L}}$) 	S	e		h	· · ·	JL	21	oj	n	(þf	•	n T N	2.	P		•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	• •	· ·	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•
•	· ·	Ìv Lv	١þ	ut	· · ·	•		An	n N N	•	4 1 1	nd	й.	eo	ti	l l	9	<u>ب</u>	аþ I	h h	•	G	. =	· · ·	(v.	E))	ŀ	51	h	•	ed	ge	•	Co	t 2.	2	ł	دو م	2] (e €	, E	• •	•	
•	• •	00	t) N	t:																				Ś	t	•	ĺ	p 	0	ne	• •	ف	٩	+	· ·	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•
	• •	•		0		• •	97	e	, ⁽⁾	\t	_ "	n	D	Ş	ט[יס	νt) ογ	1	Q	1	ηŲ	١þi	n]C	e	• •					•		• •		•	• •	0	•				•	•			
•	• •	•	0	0	•	• •			0	0	•			•	0	0	• •		•	0	0		•	• •	• •	•		• •	· ·	•	•	• •	0	•	• •	0	•		· ·	•	•	•	· ·	•	•
•	· ·	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	• •		•	•	•	• •		•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	• •	· ·	•	•	· ·	•	•	••••	•	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	•
•	• •	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	•	· ·		•	•	•	• •		•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	••••	· ·	•	•	••••	•	•	· ·	•	•	•	••••	•	•	•	••••	•	•
•	• •	•	•	•	•	• •		•	•	0	•			•	0	0	• •		•	0	0	•	•	• •	• •	•	0	• •		•	•	•••	•	•	• •	0	•	•			•	•		•	•
	• •										•			•											• •							• •	•	•						•	•	•			•

• •		• •	• •	•	••••	•		Ex	A	M	PI	E	2		DF	2	P	R	0 8	SL	E	M	2		N		NF)	•	• •	•	•	•••			•	••••
		Se	en c	h	V₹	121	ίογ	· · · ·	0-	f i		2.٦	P	•	· ·		•	••••	•	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	•	· ·	•	· ·	•	•	· ·	•		•	••••
• •	i î LÛV	nþu	t :	•	A	n		n n n	tir	.دە	te	d	g	ra ra	þh		G	E.	(()	∫.	E)	•	671	th	•	ed	ge	 	2 0 0	ts.		۲ دو	יי גר גר גר	و د	, E	•	· · ·
· ·	0L	ntþu	nt:	•	Re	tu	5n		2	t)W		М	itt "	· · · • · ·	C	2a	t	<	. <u>.</u>	t	ĺ	f	0	ne	· ·	e×	ίC	Æ	· ·	•	•	•••	•		•	••••
• •	• •	• •	• •		he	60,	t	1	nd	ξ	ר <u></u> קרי	۸t	ion	· · · · ·	oł	he	りん	<u>1</u> 2ín)		• •	•		• •		• •	•	•••	0	••••	•	•	• •	•		•	• •
•••	ĥ	hy	ìr	- - -	Ν	P /	7	• •	•	••••	•	•	••••	•	• •		•	••••	•	•	• •	•	0	• •	•	••••	•	• •	0	••••	•	•	• •	•	• •	•	• •
· ·		G	· ·	•	· ·	•	• •	· ·	•	• •	•	•	· ·	•	· ·		•	· ·	•	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	•	· ·	•	· ·	•	•	• •	•	••••	•	· ·
• •		· ·	• •	•	• •	•	• •	• •	•	• •	0	•	•••	•	• •		•	• •	0	•	• •	0	0	• •	•	•••	•	• •	0	• •	0	•	• •	•		•	• •
		 		•	• •	•			•	• •	•		• •				•	••••	•		• •	0	•	• •		• •	•	• •	•	• •	•	•		•		•	• •
· ·	••••	· ·	••••	•	· ·	•	• •		•	• •	•	•	· ·	•	· ·		•	• •	0	•	• •	•	•	· ·	•	· ·	•	• •	•	• •	0	•	• •	•		•	· ·
	• •	• •	• •	•	• •	•			•		•	•		•			•	• •	•	•		•	•		•		•		•		•	•		0		•	• •

		Examp) 2JJ	P P	ROBLE	AI 2M	I NP	· · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	•
(1) Sear	where we are the second	n of -	TSP	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · ·	· · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	•
	: An			ph G	= (V, E)	with	edge	costs	$\{c_e\}_e$	€E	•
output	. Returi neport	n a tou	r with	cost	≤t	if on	e exi	stc	· · · · ·	· · · · · ·	•
	neport	T"no sol	lution"	othewi	se			· · · ·		· · · · · ·	•
	in NP?		· · · ·	· · · · · ·			· · · · ·	· · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	•
	sequence		vertices	Can	be des	cribed	using	0 (n	logn)	bits.	•
· · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·			· · · · · ·	· · · ·	· · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	•
											•

EXAMPLES OF PROBLEMS IN NP
1) Search vusion of TSP
input : An undirected graph $G = (V, E)$ with edge costs $\{c_e\}_{e \in E}$
output: Return a town with $cost \leq t$ if one exists
output: Return a town with $cost \leq t$ if one exists neport "no solution" otherwise
Why in NP?
* Any sequence on n vertices can be described using O(n logn) bits.
* checking whether a given sequence of vertices is a valid town
* checking whether a given sequence of vertices is a valid tour and has cost \leq t can be done in polynomial time

0 0 0		0 0		•				F,	κ Δ	N	1 P			•	N	P	•	Ρ	P (12		F	Ň	Ċ		N	ŀ	J F	>		• •	0				• •	
								h /	V	11	U	し	ي ا		V				~				1.1	2													
F	<u>ا</u>	0																																			
2	-).	Se	ALC	h.	M	2.4.5	ion	Λ.	0	Ľ	. 1	15	ST																								
	Γ.			· .																																	
								• •																					• •		• •						
								• •																					• •		• •						
								• •											• •			• •		•					• •		• •			• •			
		• •						• •			•	• •			• •						•			•			•		• •	•	• •			• •		• •	
		• •						• •			•										•								• •		• •			• •		• •	
		• •			•			• •			•										•			•		•			• •	•	• •			• •		• •	
		• •						• •			•	• •		•	• •				• •		•	• •		•					• •	•	• •			• •		• •	
		• •			•		•	• •		•	•	• •			• •		•	•	• •		•	• •		•				•	• •	•	• •	•	•	• •	•	• •	
		• •						• •			•				• •			•	• •		•	• •		•					• •	•	•			• •		• •	
		• •						• •			•				• •			•	• •		•	• •		•					• •	•	•			• •		• •	
• • •		• •						•			•	• •		•	• •		•		• •	•	•	• •		•	• •			•	•	•	•			•		•	
• • •		• •						•			•	• •			• •				• •		•	• •		•	• •				•		•			• •		•	
		• •						•			•	• •		•	•		•	•	• •		•	• •		•					• •	•	• •			•		•	
								• •			•	•			• •														• •		• •			• •		• •	

•	· ·	•		• •		•	•	•	•		E	X	4 h	1	PL	E	2	• •	0	P		P	R	0	BI		EI	4	2		N		N	P	•	• •	•	•		•	• •	•	• •	• •	
	2) .	S	ea	J.C	h	i N	U	<u>(2</u>)	ìon	· ·	0)f	•	M	S	r T	· ·	•	•	•	•	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	• •	•	• •		•
•	· ·	i Ìr	νþι ·	nt	•	•	ł	łr	۰ ۲		λh	d	Ū, (20	ti	ł	0	7	2þ	ih N	•	G	=	• 	(V.	E	,)	•	જો	th h	•	ed	g	2		20	2t	ł	<u>ר</u> ב	2 2]	و (E E		· ·	•
•	· ·	00	tþ	nt	-,	•	R	<u>e</u> -	łu	ς γ	· ·	2		S	þa	'nr	\îr (9	t	٦.	وو	•	h		h	•	Ċ	22	t i	<	. .	t		f	•	on	و		ې کې	τí ς	tε	•	•	•••	•
•	• •	•		o o o o	, D	•	'n	eþ	٠ 0	t	- " -	n	ט ל ס	Ś	ם <u> </u> נ	nt)) γ	1 1	Ç	1	hU	١h	21	e	· ·	•		0	• •	•	•	• •	•	0	•	• •	0	0	0	•	• •	•			0
•	• •	•	•	• •		•	0	•	•		• •	•	•	0	•			0 0 0 0	•	0	0	0	•	•	· ·	•	•		• •	•	•	• •	•	0	•	• •	•	•	0	•	· ·	•		• •	•
•	• •	•	•	• •		•	0	0	•	•	••••	•	•	0	•	•	•	• •	•	0	0	0	•	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	• •	•	0	•	••••	•	•	0	•	· ·	•		· ·	0
•	• •	•	•	••••		•	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	••••	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	· ·	•		•••	•
	• •	•	•	• •		•	0	•	•		• •	•	•	0	•	•	•	• •	•	0	0	0	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	0	•	• •	•	•	0	•	••••	•	• •		•
			•	• •		•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	•		•	•	•		•	•			•			•	•	•	•	• •	•			•

(2) Search version of MST input: An undirected graph $G = (V, E)$ with edge costs $\{c_e\}_{e \in E}$ output: Return a spanning tree with cost $\leq t$ if one exists neport "no solution" otherwise	
input: An undirected graph $G = (V, E)$ with edge costs $\{c_e\}_{e \in E}$	
output: Return a spanning tree with cost $\leq t$ if one exists	• •
A alost "no colution otherwice	• •
repute the solution of house	
Why in NP?	• •
d	• •
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•••
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

		Exampl	0 23.	P P	ROBL	EMS	IN NP	· · · · · ·		
2 Sem	ch vusio	n of M	ST.	· · · · ·		· · · · · ·		 	· · · · · · ·	· · · ·
input	An	undisected	gra	ph G	= (V, E) with	edge	costs {	ee} ee€	· · · ·
output	: Retwr neport	n a spa - "no solu	nning T tion (λee)thuwi	with se	cost ≤	t if	one e	xistc	· · · ·
	n NP ?		· · · · · ·	· · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·		· · · · · ·	· · · · · · ·	· · · ·
U U		on n V	enticus	Can	be d	escribed	l using	0 (n lign	+ m log m`	bite.
	· · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · ·					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · ·

EXAMPLES OF PROBLEMS IN NP
2) Search vusion of MST
input: An undirected graph $G = (V, E)$ with edge costs $\{c_e\}_{e \in E}$
output: Return a spanning tree with $cost \leq t$ if one exists
output: Return a spanning tree with $cost \le t$ if one exists neport "no solution" otherwise
Why in NP?
* Any subgraph on n vertices can be described using O(n lign + m logm) bits
x checking whether a given subgraph is a valid spanning tree and has cost \leq t can be done in polynomial time
and the cost = a cost

		Exa	MPLES	OP	PROBLEMS	IN	NP		· · · · · · ·	
	Same	Vulion 0-			• • • • • • • • • • • • • • •			• • •		
1 (3)	Deman	VALUM D-	- Sequence	e a	gnment					
—				• • •	V	• • •	• • • •			
				0 0 0						
• • • •						• • •	• • • •	• • •		
• • • •								• • •		
• • • •				• • •		• • •	• • • •	• • •		• • • •
• • • •						• • •				
		• • • • • • • •								

•	•	•	•		•	•	•	•	•	•				1	E	X	A	٢	ļ	PI		E	2		C)F	2	•	Ρ	R	0	B	L	E	٢	19	2				ľ	J	P	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•
•		3) []	•	r S r	e e	N		h h		J {	J.	2Ù	ογ			0-	f		Se	29	M		C	2	G	1	. (m	M		t t	•	• •	• •	· ·	• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
)U	n	al	to (r ØX		٩þ	3	'n	ni	۲ ک ۲	n N	at	ch	•	be	M	r L	fy	0	(N1	1
•	•	•	01	ut	t) V	t		•	f	20	ti	W	n		0			. (J	λO	r I Y	۰ ۱۷	n 4	m	t	0	ĥ	ił	h	•		20	t	•••	<	· ·	t	0	, -	P		ς γC	1e	•	e	X	۱ 2	H	ر ۲	0	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•		- -	•	•	•	•	9	رو	þÒ) እ	t	u	r	D	•	Ş	ן ס	N,	ĥ	0Y	// \	(5ł	h	ч	h	2í	e e	•	0	• •	• •		• •	t	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•
•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	• •					•	•	•	•	•	•	•				0	•	•	•	•	•	0	•	• •		• •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•					•	•	•	•	0	•	•				0	•	•	•	•	•	0	•	• •		• •	0	0	•	•	•	0	•	•	•	•	0	•	0	0	0	•	0	•		•
•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•					•	•	•	•	•	•	•				0	•	•	•	•	•	0	•	• •		• •	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0		•	0	•	•	•
•	•	•	•		•	•	•	•	•	•		•					•	•	•	•	•	•					•	•	•	•	•	•	•	• •	••••		••••	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•		•	•	•	•	•	•							•	•	•	•	•	•					•	•	•	•	•		•	•	• •		• •		0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0		•	0	•	0	•

EXAMPLES OF PROBLEMS IN NP
3 Search vusion of sequence alignment
input: Two strings X and Y, gap penalty X_{gap} , mismatch penalty X_{ny}
output: Retwo an alignment with cost $\leq t$ if one exists neport "no solution" otherwise
neport "no solution" otherwise
Why in NP?
* Any alleged alignment can be described using O(n+m) bits
x checking whether a given pair of strings constitute a valid alignment and has cost \leq t can be done in polynomial time
and has $cost \leq t$ can be done in polynomial time