•	•	•	• •	• •	•		0	L		5 5 5	5		, 1 1		1	Ą	N	A	L	Y	۰ ۲ ۱	19	5		. (ŧ	•		D	E	2	l	9	Ņ	•	0	F	•	A	Ĺ	4	0	R	11		łſ	ns		•	•	•	· ·	• •	
•	•	•															•				•				•																•							•	•	•				•
																																																		•				
•	•		-				•											1	•									<u> </u>	è											•								•		•	•			
•	•	•		• •		•		•				•						÷	•	F		C		1	•	U		V				3	2	1	•		•			•	•	•	•				•	•	•	•	•		• •	•
•	•	•	•	• •			•	• •				•					•		-					•											•					•	•	•	•				•	•	•	•		•		
														Ł	A					- 1			-					κ.	a (N 1				_	-	_ '		0																
														P	Л	P	ł	K			-	L	.0	1	V		-1	Ħ	ľ			C	A			DĮ	N.	S												•				
•	•	•		• •				•									•	•	•	•					•	•		•												•							•	•	•	•	•		• •	
•	•		•		•	•	•		•	•												•			•	•									•						•		•	•				•		•	•		• •	•
		•	•	• •	•	•																			•																						•			•			• •	
			•	• •			•																			•																								•	•			
•	•	•	-	• •			•			•							•	•	•	•		•	•			•		•	•	•		•	•	•	•					•	•						•	•	•	•	•		• •	
			•	• •				•									•	•		•		•			•																						•	•	•	•	•	•		
																																															•							
									K	1	1			1.			9	0	•	/														0	5	L		T		-1	•		1.	r	L	1								
										N	J	Ι.	V	1.	1	4		V	L	. 1														F	V.	I						U,	۰,	2	J.	L								
																											I																											
			•																																																			

					• •			• •				• •																• •			• •	•										1		
								• •				• •																• •							• •					•			•	•
					• •			• •														• •			• •			• •																•
								• •														• •													•	• •								•
								Л																																				
															- 1	N	l N		N	11	Ν		•	١T	•	D	0 .	. D		t	M													
															. 1	1.		111	Ņ	ΥI	1		い	1		Γ.		JC		Ç	1.1													
											۱.																																	
	•		•	•	• •	•		• •		0	•		•	•	•	•			•	•	•	• •	•		• •	•	•	• •	•	•		•	•	•		• •	•		•		• •	•	•	•
•	•	· ·	•	•	•••	•		• •		•	•	• •	•	•	•	•	•		•	•	•	•••	•	•	· ·	•	•	••••	•	•	• •	•	•	•	• •	· ·	•	•	•		• •	•		•
•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	• •		•	•	· ·	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	• • • •	•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	• •	•	•	•	• •	· ·	•	•	•	•	• •	•	•	•
•	•	· ·	•	•	· · ·	•		· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	• •		•	•	•	· ·	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	• •	· · ·	•	•	•	•	· ·	•	•	•
•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	· · ·		•	•	•	· ·		•	•	•	· · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	• •	· · ·	•	•	•	•	· · ·	•	•	•
•	• • • • • •	· · ·	•	•	· · ·	•		· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	•	•			•	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		• • • • • •	· · ·	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	•	•	• • • • • •	· · ·	•	•	•	· ·	· · ·	•	•	•
	· · ·	· · ·		•	· · ·	•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	•	· · ·	•	•	•	•	- · ·		•	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	· · ·	•	•	•			•	•	•		· · ·	•	•	•
· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•	· · ·			• • • • •	· · ·				•	•			· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	-	•	•			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•
	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						•		· · · ·				•	•			· · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•		· · ·	• • • • • •	•				-			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•
			•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·												· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							· · · · · · · · · · ·					· · · ·	•			• • • • • • •	•				•			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
		· ·										· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																· ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		• • • • • • • •	• • • • • • • • •				•						•
		· · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·						· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·								· · · ·								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · ·		• • • • • • • • •								· ·		•	
					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · ·		• • • • • • • • •								· · · · · ·			
					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																			· ·													
					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																										· · · · · ·													

								•				•					•										_																				
													. M	11	N	ľ	11	JI	M			C	U-	T.		Pi	R	0	B	LI	E	M															
														•••								-				•		-	-	-			•														
									•					• •								÷											•														
•	•				•				•				•		•						1) L	<u>۱</u> .						•	•	•	•												•	•	
	•			•	•				•	• •			•	• •	•	•						V	۳.).		•				•	•	•	•						-				•		•	•	•
	•	 •	•	•	•				•	• •				• •	•			1		7	1 · `			ί. N	•			^		•	•	•	•								•	•				•	•
	•	 •		•	•				•	• •	•		•	• •				1	./	/.	1	1	À	``	1	<u>_</u> 1	UC	J.		•	•	•	•												•	•	•
	•			•	•				•	• •				• •				1	/.		1			\ [.] .		/	Ċ.				•	•	•	•												•	1
		 •			•				•	• •	•	•	•	• •		-	. /	/.		•	/*_		•			•	7	۲.		•	•		•	•												•	
				•	•				•		•				(c'			•	11			•	-1	i	ስ በ			Ľ	Ń			•	•													
															(.	2)			-					1	00		٦	/)																	
																											7																				
																		1			V			1		1	7																				
																	1.0	0)		Ņ	\ .	•	/.	/	<u>_1</u>																					
																	+ 0			7	1	`	V	/	_ .	_	•																				
																					_/			<u>۱</u>																							
																					(5	Γ.).																							
																						$\overline{}$	/																								
																		•														•														•	
•	•								•						•	•		•												•	•	•											•		•	•	
•	•						•		•					• •	•			•						•						•	•	•	•										•			•	
•	•				$\hat{\mathcal{C}}$	· · ·		•			, ·	i		ĺ		i'N				· 1			()	۸.		Ś		•	•	•		•	•				7			$\vec{\mathbf{h}}$	•		•	•		•	
•	•		•		q) ai			Ċ	Im	Þ٧	te	-	: (<u>'</u>	21	ť)	- '	С	uT		- (H	ť,	Ľ))		Ŵ	11	ή	in	11	7	in	P		1) ·		Ч	Ŀ	-	•			•	1
•											1	•	•							•			_		•			•		•	•		•	1	1	_		,	+	· A .							
																																			J	e	_ E	5	6(A							

	MINIMUM CUT PROBLEM
· ·	
	A
Goal : Compu	te (s,t) - cut (A,B) minimizing 2 le e e s(A)

MINIMUM CUT PROBLEM 100 100 100 3 Goal: compute (s,t) - cut (A, B) minimizing Ue Recall: (sit)-minimum cut problem reduces to max flow in linear time.

	MINIMUM CUT PROB	LEM
· ·	1 100	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	(S) 1 100 (+	
	A 100 4 1	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Application	in image segmentation	(Additional reading)

					•											• •						• •			• •						• •			• •				1
																• •						• •			• •						• •			• •		• •		
									• •							• •						• •												• •				
									• •							• •						• •												• •				
																• •						• •												• •				
																• •						• •												• •				
																• •						• •												• •				
																• •						• •												• •				
																• •						• •												• •				
																• •						• •												• •				
																• •						• •												• •				
																• •						• •												• •				
																• •						• •												• •				
								8								• •						• •												• •				
					• •		Ţ		• •					· 0									2											• •				
					• •		7							K		YA	r R	7	17	F		٠N	1 E	\mathbf{P}	[/ 1	411	J-1	6						• •		• •		
					• •				D .	٠				. •	, i i				• . (►.	. • .	ų,	<u>, ,</u>		1.11	1.4							• •		• •		
					• •				• •					• •		• •		• •				• •			• •									• •		• •		
					• •				• •					• •		• •		• •				• •			• •									• •		• •		
					• •				• •					• •		• •		• •				• •			• •									• •		• •		
									• •					• •		• •		• •				• •			• •						• •			• •		• •		
									• •					• •		• •		• •				• •			• •						• •			• •		• •		
									• •					• •		• •		• •				• •			• •						• •			• •		• •		
									• •					• •		• •		• •				• •			• •						• •			• •		• •		
		• •														• •						• •			• •						• •			• •		• •		•
		• •			• •											• •		• •		• •		•			• •						• •			• •				
			•	•	• •				• •	•	• •	•	•	• •	•	••••	•	• •	•	• •	•	• •		• •	• •		•	•		•	• •		•					
	•	• •	•	•	• •		•	•	••••	•	• •	•	•	••••	•	• •	•	••••	•	• •	•	••••	•	• •	••••	• •	•	•	•	•	· ·	•	•	•••	•	• •	0	•
•	•	• •	•	•	· ·			•	· ·	•	• •	•	•	· ·	•	· · ·	•	· ·	•	· ·	•	· ·	•	• •	· ·	• •	•	•		•	••••	•	•	· ·	•	• •	•	•
•	•	· ·	•	•	· · ·			•	· · ·	•	• •	•	•	· · ·	•	· ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· ·	· · ·	• •	•	•		•	· · ·	•	•	· ·	•	· ·	•	•
•	•	· ·	•	•	· · ·	• •		•	· · ·	•	· ·	•	•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	· · ·	· · ·	-	•		•	· · ·	•	•	· · ·	•	· ·	•	•
•	•	· · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•		•	· ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · ·	· · ·			•		•	· · ·	•	•	· · ·	•	· · ·	•	•
•	•	· · ·	•	· · ·	· · ·			•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	•	•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	•		•			•	· · ·	•	· · ·	•	•
•	•	· · ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•		•			•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•

				•										• •												• •									• •		
										C	۱.	5	•	· ^ :	_	. <u>1</u> 14	-	-		• •		-			. .	1 2	^ ·										
										Ľ	51	r	A	K				Ŀ		r	A		Ć	H	11	16	1.										
											- ·					•		Ξ.				• •					Ι.										
																																					ľ
																															•						
				• •				•												•						• •				•					• •		
								•	• •	•		•		• •					•	•	• •		•														
				• •				•	• •	•				• •						•	• •														• •		
0				•																															• •		
				• •				•	• •				•	• •						•	• •					• •			•	•			• •				*
0		•	•	• •				•				•							•						•	• •		•	•						• •		
				•				•	• •	•			•	• •					•	•	• •		•			•			• •			•			• •		
				• •				•	• •	•			•	• •						•	• •								• •			•			• •		
				•					• •				•	• •						•									•			•			• •	•	•
				• •				•	• •	•			•	• •						•	• •					• •			• •	•		•	• •	•	• •	•	
			•	• •				•											•	•					•				• •			•			• •	•	•
				• •				•	• •					• •						•	• •					• •			• •						• •	•	
				• •																									• •			•			• •	•	
																																•					

· ·	•	•		•	•		• •		•			•		•		3	P	PA	R	۲2		T	E	•	۲ ۲	1 A	T/	C		N	G	• •	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	• •	•		• •
• •	ì	n	bu t	t.	•	â	n i	Ų	Ind	di	rl	Ċ	tea	Ļ		o î f	s Øv	∿t	ito	Ľ	g;	ha ha	p1	٦	•	• •	•	0	• •	•	•	••••	n V	• •	•	•	• •	•	•	•	Ŵ	•	•	• •
	•		•	•	•	C	=	- (V	.(J	۲ ۲	J,) (•	•	•	•		•	•	•	•	••••	•	•	• •	•	•					•	· ·	•			~ -		•	• •
	•		•	•	•	•	• •			•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	• •		•	•	•	• •	•	•	• •		•				$\left \right $		• •			/	· ·		•	
• •	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	• •		•	•	•	• •	•	•	• •	•	•		•		$\left.\right $	\sim	\geq	<	$\left \right $	ر ب ر	· · ·		•	• •
	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	0	• •		•	•	•	•	• •	0	0	•	•	• •	•	0	• •		•	· \ · \			F				-		· ·		•	
				•	•		• •					•	•	•	• •						• •			•	•	• •	0		• •	•	0					0			•					0 0
• •	•	•	•	•		•	• •		•	•	•	•	0	0	• •		•	•	•	•	• •		0	•		••••	•	0	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	0	•	•	••••	•	•	• •
· ·	•	•	•	•	•	•	· ·		•	•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	• •	•	•	•	•	••••		•	••••	•	•	· ·	•	• •	•	•	· ·	•	•	•	••••	•		
• •	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	• •	•	•	•	•	••••	•	•	••••	•	•	• •	•	• •	•	•	· ·	•	•	•	••••	•	•	• •
• •			•	•	•	•	• •			•							•			•				•	•	• •		•	• •	•	•	• •		• •			• •			•		•	•	• •

BIPARTITE MATCHING		
input : an undirected bipartite graph $G = (V \cup W, E)$		$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
goal : a maximum cardinality matching		
subset of edges with no shared endpoints	· · · · ·	

•	• •	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	ß	51	P	Â	R	י רו		Т	E	•	ļ	M	A	T	Ĉ	H	۱r ۱	10	Ĵ	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•	•	••••		•
•	· ·	C	lai	m			Bi	þ	Ŵ	Hi	ite	-	Ŷ	ni	xt	r J	ŵ۱	n Ng Ng	•	ħ	الا	dr	۰ ۸C	<u>ى</u>		ᡧ)	'n	no	۱X.	ì m	٦W	m	•	f	01	5	ĥ		•	Li	nł	w		- l i	im	e.	•
٠																												٠		٠		• •																
•	• •			•	• •					•	• •			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•						•		•	• •				•					•	•	•	•		• •	•	•
	• •		•	•	• •	•		•	•	•	• •	•		•			•	•	•	•	•	•	•			•	•				•	• •		•		•					•	•	•	•	•	• •		•
•	• •		•		• •			•		•	• •			•			•	•				•	•			•	•					• •		•	•											• •		
	• •				• •																	•																				•					•	•
	• •			•	• •										•	•			•	•	•		•						•							•						•	•	•		• •		•
	• •			•	• •				•						•		•	•	•	•	•	•	•				•		•							•						•	•	•	•	• •	•	•
•	• •	•	•	•	• •					•	• •					•	•	•	•	•	•	•	•			•					•	• •		•	•	•						•	•	•		• •	•	•
•	• •	•	•	•	• •				•	•	• •						•	•	•	•	•	•	•	• •		•	•				•	• •		•		•	• •					•	•	•	•	• •	•	
	• •				• •				•	•	• •								•	•	•	•	•				•					• •				•												
	• •				• •																																								•			
•	• •			•	• •	•		•	•	•	• •			•			•	•	•	•	•	•	•								•	• •				•								•		• •		•
•	•	•	•	•	• •				•	•	•					•	•	•	•	•	•	•	•	• •							•	• •		•	•	•	• •					•		•		• •	•	
•	•			•	• •				•	•	•						•	•	•	•	•	•	•	• •							•	• •			•	•	•							•		• •	•	
	•				•						•													•								• •					•											

Claim: Bipartite	matching hednes	to maximum	flow	in linear	time.
Proof:	V	\mathbf{W}			
			· · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · ·		· · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · ·	· · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · ·

			BIPARTITE	MATCHING		
•	Claim :	Bipartite	matching hedness	to maximum f	210w in linear	-time.
•	Proof:		V	\mathcal{M}		· · · · · ·
•	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
•	· · · · · · · · ·					· · · · · ·
•	· · · · · · · ·					· · · · · ·
•	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·				· · · · · ·
•	· · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · ·
•	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
•	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·

•			BIPARTITE	MATCHING		
•	Claim =	Bipartite	matching hedness	to maximum	flow in	linear time.
	Proof :	· · · · · · · · · · ·	\mathbf{V}	\mathcal{M}	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
•	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·			 	· · · · · · · · · · · · · ·
•	· · · · · · · · ·					· · · · · · · · · · · · · ·
•	· · · · · · · ·					· · · · · · · · · · · · · ·
•	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·			· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·
•	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	 	· · · · · · · · · · · · · ·
•	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·			· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·

			BIPART	TTE MA	TCHING	· · · · · · ·		
	Claim :	Bipartite	matching h	educes to	maximum	flow in	n linear	time.
· · · ·	Proof :				λ	· · · · · · ·	· · · · · · ·	
· · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·				· · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · ·
	· · · · ·		7				· · · · · · ·	· · · · · ·
· · · ·	· · · · ·							· · · · · ·
· · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·				 	· · · · · · ·	· · · · · ·
· · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · ·
· · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · ·
· · ·	· · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · ·

	· · · · · · · · ·	BIPAR	TITE	матсні	NG	· · ·	· · · · · ·	
Claim :	Bipartite	matching	hedness	to maxim	num flow	m	linear	-time.
Proof :	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	W		· · ·	· · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·				· · · · · · · ·	· · ·	· · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · ·			T			· · ·	· · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · ·						· · ·	· · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·		1		· · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · ·	NOTE :	every (s,t)	flow po	ith includ	les exactly	· · ·	· · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	one edge	of given	bipartite	gnaph	· · ·	· · · · · ·	· · · · · ·

· · · · · · · · ·		BIPARTITE MATCHING							
Claim :	Bipartite	matching	hedness	to	maximum	flow	'n	linear	time.
Proof:	· · · · · · · · · ·		· · · · · · ·	Ŵ	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · ·	· · · · · ·	· · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·					· · · · ·	· · · ·	· · · · · ·	· · · · ·
	(S)=			-		*(t)	· · ·	· · · · · ·	· · · · ·
· · · · · · · · · ·		1				7	· · ·		· · · · ·
· · · · · · · · · ·						· · · · ·	· · ·	· · · · · ·	· · · · ·
· · · · · · · · · ·	Chp =		· · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · · ·	· · · · ·	· · ·	· · · · · ·	· · · · ·
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·			· · · · ·		· · · · ·	· · ·	· · · · · ·	· · · · ·

 	· · · · · · · · · ·	BIPA	RTITE	MAT	TCHING	· · · · ·		· · · · · ·	
Claim :	Bipartite	matching	hedness	to	maximum	flow	in	linear	tim
Proof :	· · · · · · · · · ·		· · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · ·	· · · · · ·	• • •
	· · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · ·	· · · · · ·	
		1 70			1				
	(s) =					(+)			0 0
· · · · · · ·						7	· · ·	· · · · · ·	· ·
			1 *		F				• •
	Cab =	= 1 cath			Cab = 1 Pa		• • •		
	Ϋ́				0.p- 2 0.		· · ·	· · · · · ·	
							• • •		• •

· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	BIPA	RTITE	MA	TCHING	· · · · ·		· · · · · ·	
Claim :	Bipartite	matching	hedness	to	maximum	flow	in	linear	time
Proof :	· · · · · · · · ·		· · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · ·	· · · · · ·	
	· · · · · · · · · ·		<pre></pre>		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · ·	· · · · · ·	
								· · · · ·	
					1	×4	· · ·	· · · · · ·	
						T			
			1 ×				• • •		
· · · · · ·	Cap =	= 1 each	· · · · · ·		Cap=1 ec	ich i			
· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·		· · · · · · · ·			· · · · · ·	
					· · · · · · · ·				

· · · · · · ·	· · · · · · · · ·	BIPA	RTITE	MAT	TCHING	· · · · ·		· · · · · ·	· · ·
Claim :	Bipartite	matching	hedness	to	maximum	flow	in	linear	time
Proof:		V		\sim	1		• • •		
			\ +∞						
			+00		L		• • •		
· · · · · · ·	S		+40		1	t	• • •	· · · · · ·	• • •
· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	1	+ 00+		1		• • •	· · · · · ·	••••
· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·				1	· · · ·	· · ·	· · · · · ·	• • •
· · · · · · ·	Cap =	= 1 each	· · · · · · ·	· · ·	Cap = 1 ec	ach	· · ·	· · · · · ·	
· · · · · · ·		· · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · ·	· · · · · · · ·			· · · · · ·	

	BIPARTITE MATCHING	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
Claim :	Bipartite matching reduces to maximum flow	w in linear	time.
Proof:	\mathcal{V}^{t}	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · · ·	$S = \frac{1}{1}$ $\rightarrow $ $+\infty$ 1 $+\infty$ 1 $+\infty$ 1 $+\infty$	· · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · · · ·	Cap = 1 each $Cap = 1 each$		· · · · · ·
· · · · · · · · · · ·	Bipartite matching \iff Integral Flow Size of motching = Value of flow	(Cheek!)	· · · · · ·

• •		BIPARTITE MATCHING	
· ·	Claim :	Bipartite matching hedness to maximum flow	in linear time.
· ·	Proof:	\mathbf{V}	
· ·	· · · · · · · ·		
• •	 	$S = \frac{1}{1}$ $+\infty$ $+\infty$ $\frac{1}{1}$ $+\infty$	· · · · · · · · · · · · · · · · ·
· ·			achieved by
• •			tond-tulkencon and Edmonds-karp
• •	· · · · · · ·	Cap = 1 each $Cap = 1$ each	
· ·		Bipartite matching <-> Integral Flow	(Cheek!)
		Size of matching = Value of flow	

```
3. HALL'S THEOREM
```

· · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·		· · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·	· ·
· · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·		· · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·	· ·
· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · ·		· · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·	• •
· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·		· · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·	• •
· · · · ·		· · · · · · · · · ·		· · ·	· · · · · ·		· ·
· · · · ·				· · ·	· · · · · ·		• •
· · · · ·	· · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·	· ·

neighbor set of vertices in S N(S)

. **V**. N(S)

Perfect matching : all vertices in V are matched.

Does this graph have a perfect matching?

<th>· ·</th> <th></th> <th> <th></th></th>	· ·		<th></th>	
· ·	· ·		Imbalanced	Vertex Sets
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·

Does this graph have a perfect matching?

Does this graph have a perfect matching? No

Does this graph have a perfect matching? No

S N(S)Does this graph have a perfect matching? No

(S) < |S|Constructing Set Does this graph have a perfect matching? No

. 				[N(S)] < [S] Constructing Set	
Hall's	theohem:	Constricting	sets are	the only obst	aule to perfect matching	

•		•	•	•	•	•	• •	• •	•	•	•	•	••••		•	•		H	AI	J		2	. –	۲ł	łE	,0	R	EI	M	•	••••	•	•	• •	•	•	• •		•	•	• •	•	• •	
•	F	1	•	b	i þ)A	νĻ	it	e		9	Ko	۰þ۱	h	•	G				<u>v</u>	U	ŀ	, ک		E)	•	bi	H		ļv	· [4		W	1		ha	ع	r G	ر .	•	• •	
•		Le	f	t-	ŀ	ะ วั	∖ f	ور	t	n	20	n N	ch	ìn (g J J	•	if	· ·	Rn	~d	•	n On N	nly		ìf) 	<u>1</u>	₽ ₽	2	<u>C</u>	V	1 1 1	•		l (S	5) 1	7	7	<u> </u> \$; .	· ·	•	· ·	
•		•	•	•	•	•			•	•	•	•			•	•	•		•	•	•	•	• •	•	•		•	•	• •	•		•	•		•	•			•	•		•		
•						•	• •							-									• •														•			•				
•		•			•	•	• •			۰			• •			•						•	• •		•	• •			• •		• •			• •	٠		•	• •			• •		• •	
					•	•	• •					•	• •				•					•	• •			•		•	• •	•			•	• •			•	• •	•	•	• •	•	• •	
										•	•				•		•							•									•			•							• •	
•							• •						• •									•	• •			• •			• •		• •			• •			•			•	• •		• •	
		•			•	•	• •			•	•	•	• •				•		•			•	• •	•		• •	•		• •		• •			• •	•		•	• •	•	•	• •		• •	
				•	•	•	• •				•	•	• •				•					•	• •			•		•	• •		• •		•	• •			•	• •	•	•	• •	•	• •	
							• •		•				• •				•												• •			•		• •						•			• •	
					•	•	• •				•	•	• •										• •						• •		• •			• •									• •	
•					•	•	• •			•	•	•	• •				•	• •				•	• •			• •			• •		• •			• •			•	• •	•				• •	
•							•						•										•			•					• •			•										f

· ·	•	•	•	• •	• •	•	•	• •	· ·	•	•	•	••••	••••	•	•	H	A	LL	Ś	2	T	H	E	0	21	Er	1	•	• •	•	· ·	•	•			•	•	•••	•	· ·	•
· · ·	A			oi	þ	27- 2	Hi-	te	_	9	-2	¢þ	h	· ·	Ċ	.	5	· (<u>V</u>	U	ŀ	J,	Ē			. (41	th	•	ļν	1	₹	ľ	W	1	ŀ	۲ ۹	٤	2	•	· · ·	•
· ·	н Н) Н	le.	ft		þ.	<u>بر</u> ۔	fe	ct	Ŷ	n	at	τ γ	ùr	g	•	ĺf		R	nd		07	ly	•	if	 	-	+	2	<u>C</u>	₩ ₩	2 2 2		N N	(S)	7	~]	S 		•	· ·	•
· ·	•	•	•	• •	• •	•	•	• •	· ·	•	•	•	· ·	••••	•	•	•	· ·	•	•	• •		•	•	• •	•	• •	•	•	· ·		••••	•	•			•	•	• •	•	· ·	•
• •		•	•		• •			• •				•	• •				•	• •						•	• •		• •			• •	/								• •		• •	•
• •		•								•	•				•	Ĺ		· · · • 1 4						- - [•	. 1				י. מ	/	•		•					•	• •			
																Po	22(161	Ŋ.	e	X	01	en	1	al	t	IM	e.	1.													
• •		•	•		• •		•	• •		٠		•	• •			•		• •	U		. •			•	• •		• •			• •	•				•		•		• •	•	• •	•
• •		•	•	•	• •			• •				•	• •		•		•	• •					•	•	• •	•	• •	•	•	• •		• •			•				• •		• •	•
																																			•				• •			
• •		•			• •		•	• •					• •				•	• •							• •		• •	٠		• •									• •	•	• •	٠
• •		•	•		• •		•	• •				•	• •		•		•	• •			•			•	• •		• •	•		• •		• •	•		•				• •	•	• •	
• •				• •	• •			• •				•	• •				•	• •			• •		•	•	• •		• •			• •		• •							• •	•	• •	
											•		• •												• •																	
					• •			• •					• •												• •																• •	

		HALL'S T	HEO	rem	
A bipartite	graph G	= (V U W,	E)	with $ V \leq W $	has a
left-perfect	matching if	and only	if	₩ S ⊆ V, [N(S)	7/51.
Proof: (===	<pre></pre>	· · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · ·		· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · ·		· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · ·		· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

HALL'S THEOREM	•
A bipartite graph $G = (V \cup W, E)$ with $ v \leq W $ has a	•
left-perfect matching if and only if $\# S \subseteq V$, $ \mathbb{N}(S) \geq S $.	•
Proof: (⇒) easy!	•
\bullet	•
$S = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \bullet \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \bullet \end{array} \right) = \left(\begin{array}$	•
•	
• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•
	•

	HALL'S THEOR	REM
A bipartite graph	$G = (V \cup W, E)$	with $ V \leq W $ has a
left-perfect matching	if and only if	₩S ⊆V, N(S) 7 S .
Proof (E) Reduct	tion to max flow	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

HALL'S T	HEOREM
A bipartite graph $G = (V \cup W)$	E) with $ v \leq W $ has a
left-perfect matching if and only	if $\forall S \subseteq V$, $ N(S) \geq S $.
Proof (E) Reduction to more of	How,
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	$\mathcal{W} = \mathcal{W}$
	/
	—— O
	O

HALL'S THEO	REM
A bipartite graph $G = (V \cup W, E)$	with $ v \leq W $ has a
left-perfect matching if and only if	$\forall S \subseteq V, N(S) \geq S .$
Proof (E) Reduction to max flow	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
V W	
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

	HALL'S THEO	REM		
A bipartite graph G :	= (V U W, E)	with v <	E W has	A
left-perfect matching if	and only if	¥ S ⊆ V,	N (S) ⋜⁄	S[.
Proof (E) Reduction	to max flow	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	
	V W	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · ·
			· · · · · · · ·	· · · · · · · ·
S	0 0	t		· · · · · · · ·
				· · · · · · · ·
		<pre></pre>		· · · · · · · · ·

HALL'S THEOREM
A bipartite graph $G = (V \cup W, E)$ with $ V \leq W $ has a
left-perfect matching if and only if $\# S \subseteq V$, $ N(S) \ge S $.
Proof: (<) Reduction to max flow.
$+\infty$
$+\infty$

HALL'S THEOREM
A bipartite graph $G = (V \cup W, E)$ with $ v \leq W $ has a
left-perfect matching if and only if $\#S \subseteq V$, $ \mathbb{N}(S) \geq S $.
Proof (E) Reduction to max flow.
\sim
1
a a a a a a a a a a a a a a a a a a a
\sim

HALL'S THEOREM
A bipartite graph $G = (V \cup W, E)$ with $ V \leq W $ has a
left-perfect matching if and only if $\#S \subseteq V$, $ \mathbb{N}(S) \geq S $.
Proof (E) Reduction to max flow.
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/1/1.
+∞

HALL'S THEOREM
A bipartite graph $G = (V \cup W, E)$ with $ v \leq W $ has a
left-perfect matching if and only if $\# S \subseteq V$, $ \mathbb{N}(S) \geq S $.
Proof: (=) Reduction to max flow.
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/1/1.
Theorem follows from claim Since:
$+\infty$

HALL'S THEOREM
A bipartite graph $G = (V \cup W, E)$ with $ V \leq W $ has a
left-perfect matching if and only if $\# S \subseteq V$, $ \mathbb{N}(S) \geq S $.
Proof: (<) Reduction to max flow.
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/11.
Theorem follows from claim Since:
min cut capacity 7/11 Store
+00 ~

HALL'S THEOREM
A bipartite graph $G = (V \cup W, E)$ with $ V \leq W $ has a
left-perfect matching if and only if $\# S \subseteq V$, $ \mathbb{N}(S) \geq S $.
Proof: (<) Reduction to max flow.
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/11.
Theorem follows from claim Since:
min cut capacity 7/11 Sti
\Rightarrow max flow value $\frac{1}{2} V $
$+\omega$

HALL'S THEOREM
A bipartite graph $G = (V \cup W, E)$ with $ V \leq W $ has a
left-perfect matching if and only if $\# S \subseteq V$, $ \mathbb{N}(S) \geq S $.
Proof: (=) Reduction to max flow.
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/11.
Theorem follows from claim Since:
min cut capacity 7/11 Sti
\Rightarrow max flow value $\frac{1}{2} v $
=> flow out of s is saturated.
$\pm \omega$

HALL'S THEOREM
A bipartite graph $G = (V \cup W, E)$ with $ v \leq W $ has a
left-perfect matching if and only if $\# S \subseteq V$, $ \mathbb{N}(S) \geq S $.
Proof (E) Reduction to max flow,
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/11.
Theorem follows from claim Since:
min cut capavity 7/11 Sti
\Rightarrow max flow value $7 V $
=> flow out of s is saturated.
=> left-perfect matching.

•	· · · · · · ·		HALL'S	THEOREM		· · · · · · · · · · ·
•	Claim :	Every (s,t)	cut has capaci	fy 7/ 1V1.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	W
•	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	Δ		1
•			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	S		1 t
						1
•	· · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·		
•	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	+∞	5
0	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
•	· · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
0	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·

· · ·	· · · · ·		HALL'S THEOREM	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	laim :	Every (s,t) cut	has capacity 7/11.	$\mathcal{V}_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}_{\mathcal{V}} = $
Pr	rof:	Fix any (s.t)-cut	Γ (A, B).	
	· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
· · ·	· · · · ·			
· · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	+ 00
· · ·	· · · · ·			
· · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · ·	· · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

· · · · · · · ·	HALL'S THEOREM	
Claim :	Every (s,t) cut has capacity 7/ 11.	\mathbf{W}
Proof :	Fix any (s,t)-cut (A, B).	
· · · · · · · ·	S	1 t
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · ·		+00
· · · · · · · ·		
· · · · · · · ·		
· · · · · · · · ·		

HALL'S THEOREM Claim: Every (s.t) cut has capacity 7/11 Proof Fix any (s,t)-cut (A, B). Let V := V n A. S

HALL'S THEOREM Claim: Every (s.t) cut has capacity 7/11 Priof Fix any (sit) - cut (A, B). Let V := V n A. S

HALL'S THEO	REM
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/ 11	
Proof Fix any (s,t)-cut (A, B).	A 1 V 1
$Let \ V' := V \ n \ A $	
Then, $N(V') \subseteq A$	
Otherwise, capacity of A is too and	·······································
the claim follows)	+∞

HALL'S THEOREM
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/11. V W
Priof Fix any (s,t)-cut (A, B).
$het V := V \cap A.$
Then, $N(V') \subseteq A$
Otherwise, capacity of A is too and B
the claim follows). $+\infty$
\Rightarrow capacity of (A, B) 7
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

HALL'S THEOREM	•
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/11. V W	•
Priof Fix any (s,t)-cut (A, B).	
Then, $N(V') \subseteq A$)
(Otherwise, capacity of A is too and the claim follows). to +00	•
\Rightarrow capacity of (A, B) $7/ V - V' $	
edges from S	•
$+ \circ \vee \setminus \vee'$	•

HALL'S THEOREM	•
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/11. V W	•
Priof: Fix any (s,t) -cut (A, B) . Let $V := V \cap A$.	
Then, $N(V') \leq A$	
(Unactive, capacity of A is too and the claim follows).	•
$\implies \text{Capacity of } (A, B) 7 V - V' + N(V') $	•
edges from S edges from N(V) to V/V to t	•

HALL'S THEOREM
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/11. V W
Proof Fix any (s,t) -cut (A, B) . Let $V' := V \cap A$. Then $N(V') \in A$
(Otherwise, capacity of A is too and the claim follows).
$\implies Capacity of (A, B) 7/ V - V' + N(V') 7/?$

HALL'S THEOREM
Claim: Every (s,t) cut has capacity 7/11. V W
Proof Fix any (s,t) -cut (A, B) . Let $V' := V \cap A$. Then, $N(V') \subseteq A$
(Otherwise, capacity of A is too and the claim follows).
\Rightarrow capacity of (A, B) 7/ $ V - V' + N(V) 7/ V $
by Hall's condition