· · · · · · · · · ·	COL 351 : 1	ANALYSIS	DESIGN OF	ALGORITHMS	· · · · · · · ·
				· · · · · · · · · · · ·	
		TOT	105 20		
			KE LL		
	TV.	IAMIC D	OG C D Anamalal C	T .	
	y r	Marile r	KU Q KAMMING	L -	
		A NATES IN	IDEDEDENT		
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	ngnied II	NDEFEDENT		
	OFAT	• • • •		- VALOU	
	Stri 20,	2024	KOH		

	•			•	•			• •	N	1 à	- 1	K.	•	لما	Ē	E I	6	H	T	IÅ	J'	5	- 1	Þ	-	17		E n	J -	Т		SF	T	-	0	N		>A		H	י כי	•	•	•		• •	•	
									U	U r	\ '						٦	11		H.	• 1				-1	N J		51		1					U			. • •										
								• •	-							•	•										•																•		•			
								• •								•	•		•						•		•	•	•					•								•	•		•			•
							•	• •						•	•	•	•	•	• •		•				•	•	•	•	•	• •	•			•				•	• •		•		•		•	• •		
			•				•	• •				•			•	•	•	•	•		•						•	•	•	• •	•			•				•					•		•	• •		•
			•					• •		•				•		•	•	•	•						•		•	•				•		•					• •				•	•	•			
							•	• •							•		•	•	•		•							•	•	• •				•				•	• •						•	• •		
								• •						•			•	•							•									•														
			•				•	• •					•		•		•	•								•		•	•	• •			•				•	•	• •							• •		
							•	• •				•					•				•									• •				•			•	•										
																													•										• •									
								• •								•	•		• •								•	•		• •				•				•	• •						•			•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							•	• •								•	•								•		•	•						•				•					•		•			•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							•	• •						•	•	•	•	•	• •		•				•	•	•	•	•	• •	•			•				•	• •		•		•		•	• •		•
	•	•	•		•	•	•	• •			•	•	•		•	•	•	•	•		•		•	•	•	•	•	•	•	• •				•				•	•		•		•			• •		•
	•		•		•		•	• •			•		•		1	•	•	•	•				•			•	•	•	•	• •				•			•	•	•		•	•	•		•	• •		•
				•			•	• •							•	•	•	•	•				•			•	•	•	•	•				•				•	•						•	• •		•
							•	• •				•		•					• •										•	• •			•			0		•							0	• •		

• •	· · ·	•	•	· ·	•	1	1/	4	X	•	Ŵ	I E	51	9	H	T		N	D	E	P	E١	71	ÞE	N	T	•	S	E	Γ.	0	N		PA	T	H.	5	•	· ·	•	•	· ·	•
• •	inp	ut	•	0		þ0	t	۰ ۱	g	ר הם	þ	1	, , ,	Ĵ	E	(V	, E) (si ł	h	r r r)0Y	י ר ר	ہ ا ویا (ja	tiv	Je	ł	ve ve	ñg	hts		0n		ม 1ย	ť	i Ce	र र	۲ ک ^و ر	N.	, ♥€	0 0 0
				• •																																							
• •				• •			• •																								• •												
• •				• •	•	•	• •					•	•	•				•	•	•			•					• •			• •			•					•			• •	
• •	• •	•		• •	•	•	• •				•	•	•	•	• •			•	•	•			•	• •				• •		•	• •			•					•		•	• •	
• •	• •			• •		•	• •					•		•	• •			•	•			•		• •				• •			• •			•		•		•	•		•	• •	
• •		•	•		•	•	• •					•	•		• •			•						• •			•	• •			• •	•			-						•	• •	
• •	• •	•		• •			• •	•			•	•	•	•	• •	•			•					• •				• •		•	• •		•	•					•			• •	
				• •			• •				•			•	• •									• •						•	• •		•										
• •				• •																																							
• •				• •		•	• •												•					• •							• •			•					•			• •	
• •			•	• •			• •						•					•	•				•	• •			•	• •			• •			•					•			• •	
• •				• •	•	•	• •	•		•	•	•	•	•	• •			•	•				•	• •			•	• •		•	• •			•		•		•	•		•	• •	
• •				• •		•	• •					•	•		• •			•	•			•		• •				• •			• •			•		•		•	•		•	• •	
• •	• •	•		• •			• •					•	•	•	• •				•				•	• •		•		•		•	• •			•					•			•	
• •				• •	•	•	• •					•		•	•				•			•		• •				•			• •			•				•	•		•	•	
• •				• •			• •					•		•	• •			•						• •				•			• •											• •	

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	MAX WEIGHT	IN DEPENDENT S	ET ON PATHS	•
input: a	path graph $G = (V,$	E) with nonnegative	weights on vertices {wo}	
· · · · · · · · · · · ·				•
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•
				•
	V_2 V_3 V_4		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•
· · · · · · · · · · · ·				•
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•

MAX WEIGHT INDE	pendent s	et on pa	THS	· · · · · · ·
input: a path graph $G = (V, E)$ with	n non negative	weights on	vertices	{wo}
output: an independent set SSI	of G with	maximum	$\sum_{v \in c} \omega_v$	· · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · ·		· · · · · ·	· · · · · · · ·
V_1 V_2 V_3 V_4	· · · · · · · · · · · ·		· · · · ·	· · · · · · ·

MAX WEI	ght indep	ENDENT SE	T ON PA	THS	· · · · · · ·
input: a path graph C	$\dot{q} = (V, E)$ with	nonnegative	weights on	vertices	{wg}
output: an independent	set SEV	of G with	maximum	Z Wy	· · · · · · · ·
	subset of	non-adjacen	t vertices		· · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · ·
\mathbf{v}_1			· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·
		· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·
			· · · · · · · · · ·		
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·		

	MAX WE	IGHT INDI	ependent	r set on pa	Ths
input: a	oath graph	G = (V, E) w	ith nonnego	tive weights on	vertices {w_}
output: an	independent	t set SS	v of G	with maximum	$\sum_{v \in S} \omega_v$
· · · · · · · · · · · · ·		- subset c	of non-ad	jacent vertices	
		· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · ·	V_2 V_2	· · · V ₄ · · · ·		· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
	-00-				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · ·

	MAX W	EIGHT INDEP	ENDENT SI	T ON PA	THS	
input :	a path graph	G = (V, E) with	nonnegative	weights on	vertices	{wg}
output	an independu	nt set SEV	of G with	maximum	Z Wy	· · · · · · ·
		 subset of 	non-adjacen	t vertices	• • • • • • • •	· · · · · · ·
			· · · · · · · · · · · ·			
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·
			· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·
· · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	

	MAX WE	IGHT INDEP	ENDENT SI	T ON PA	THS	
input: a	path graph	G = (V, E) with	nonnegative	weights on	vertices	{wg}
output: (an independum	t set SEV	of G with	maximum	Z Wy	· · · · · · ·
		- subset of	non-adjacen	t vertices		· · · · · · ·
			· · · · · · · · · · · ·			· · · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·
			· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · ·
· · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·		· · · · · · ·
	· · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · ·		· · · · · · ·
						· · · · · · ·

· · · · · · · · · ·	MAX W	EIGHT IND	EPEND	ENT SI	T ON PA	THS	
input: a	path graph	G = (V, E) 6	sith non	negative	weights on	vertices	{wg}
output: an	n independu	nt set SS	ev of	G with	maximum	Z Wy	· · · · · ·
· · · · · · · · · · ·		- subset	of non-	- adjacen	t vertices		· · · · · ·
			How	many	independent	sets ?	
	V ₂ V ₃		· · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · ·
		· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · ·

	MAX W	EIGHT	INDEPI	ENDENT SI	T ON PAT	Гнз
input: a	path graph	G = (V, 1	E) with	nonnegative	weights on	vertices {wo}
output: ar	n independe	nt set	<u>۷ ک</u> 2	of G with	maximum	$\sum_{\mathbf{w}} \omega_{\mathbf{w}}$
· · · · · · · · · · · ·		– subs	et of	non-adjacer	t vertices	
	· · · · · · · · · ·	 	 	How many	independent	sets ? 8
۱۷ 	V ₂ V ₃	V ₄		\emptyset , four sing	etons, $\{V_1, V_3\}$	$\{v_2, v_4\}, \{v_1, v_4\}$
	V_2 V_3	. V _q 		Ø, for sing	etone, {V1, V3}	$, \{V_2, V_4\}, \{V_1, V_4\}$

· · · · · · · ·	MAX WEIG	iht indep	ENDENT SET ON PATHS
input: (a bath graph G	=(V,E) with	nonnegative weights on vertices {wo}
output:	an independent	set SEV	of G with maximum Z Wy
· · · · · · · · ·		subset of	non-adjacent vertices
			How many independent sets ? 8
V₁ 	V ₂ V ₃		\emptyset , four singletone, $\{V_1, V_3\}$, $\{V_2, V_4\}$, $\{V_1, V_4\}$
· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·		in general : exponential in n 🙁
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	

			• •						•			• •			•												•			• •			* 1	 		• •		
											· . 👗		C	Δ	f r	-		•		٨	0 0	<u>م</u>	~	4		1												
											ľ	٢.	4	K	とも	:]) Y		. 1	1	r r	ſΚ	U	R	Ċ	1												
											Ţ		_!			-																						
																																						Ĩ
	•	•	• •		•			•	• •	 •		• •		•				•		•	• •			•				•	•	• •	•				•			
•	•	•	• •	•		•		•	•	 •	•			•	• •		•	•		•	•			•		•			•						•			
		•		•				•			•	• •			• •		•			•	• •								•						•	• •		
								•				• •			• •						•						•		•	• •						• •		*
	•		• •	•				•	•	•					• •			•		•	•					•	• •	•		• •	•					• •		*
•	•	•	• •	•				•	•	•	•	•		•	• •		•	•		•	•			•		•	•	•	•	•	•				•	• •		•
		•		•			•	•	•			• •		•	• •			•		•	•						• •		•						•	• •		
												•			• •						•						•					•	*			• •		•
								•	•			• •			• •					•	•						• •			• •		•		•		• •	•	
		•						•	•			• •		•	• •					•	•						• •			• •		•	•		•	• •		
		•						•	•			• •		•	• •					•	•						• •			• •		•	•		•	• •		
																																				• •		
															• •												• •			• •						• •		

• •	A GREEDY APPROACH																																			
· ·	F	tmone		fe	08"	161	e	V	197	Hi	i s				Zel	وز	t	· · ·))))	e	ŀ	м	th		mø	y¢i	mu	1 m 1	· ·	W	eig	jht		· ·	•	•
	• • •			• •		•		• •	•	• •		• •		•	• •	•		• •	•				• •	•	• •	•	• •		• •			• •	•	• •	•	•
• •	• • •				• •	•	•	• •		• •	•	• •	•	•	• •		•	• •	•	•		•	• •		• •		• •		• •	•	•	• •	•	• •		•
• •	• • •			• •	• •	•	•	• •		• •		• •			• •		•	• •		•			• •		• •		• •		• •		•	• •		• •	•	•
• •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																																			
• •																																				
• •	• • •				• •							• •						• •											• •				•			
• •	• • •				• •					• •		• •			• •			• •		•			• •		• •		• •		• •				•			•
• •	• • •				• •					• •		• •			• •		•	• •		•		•	• •		• •				• •		•	• •	•		•	•
• •	• • •				• •			• •		• •		• •		•	• •	٠		• •		•			• •		• •				• •				•	• •		•
• •	• • •		•	• •	• •			• •	•	• •	•	• •			• •		•	• •	•	•		•	• •		• •		• •		• •			• •		• •	•	•
• •	• • •		•		• •			• •	•	• •		• •		•	• •		•	• •		•		•	• •		• •	•	• •		• •				•	• •		1
• •	• • •		•	• •	• •		•	• •		• •		• •	•	•	• •			• •		•			• •	•	• •		• •		• •	•	•	• •		• •	•	•
• •	• • •		•	• •	• •			• •	•	• •	•	• •			• •		•	• •					• •		• •		• •		• •					• •		1
• •	• • •			• •	• •		•	• •		• •		• •						• •			•		• •	•						•		• •			•	

· · · ·	A GREEDY APPROACH														
· · · ·	Among	feasible	vertices,	Select one	with	maximum	Weight.								
· · · ·		· · · · · · · ·			· · · · · ·	· · · · · · · · ·									
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·		V_2 V_3	V ₄	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·								
· · ·		· · · · · · · · ·	1	4 5	4	· · · · · · · · · ·									
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·								
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·								
· · ·															

· · ·	A GREEDY APPROACH														
· · · ·	Among	feasible	vertices,	Select one	with	maximum	Weight.								
· · ·		· · · · · · · ·			· · · ·	· · · · · · · · · ·									
• • •	· · · · · · ·	· · · · · · · ·		V_2 V_3	V ₄	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·								
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	1	4	4	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·								
· · · ·		· · · · · · · ·													
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·								
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·								
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·								

· · ·	A GREEDY APPROACH														
· · ·	Among	feasible	vertices,	Select one	with	maximum	Weight.								
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·			· · · ·	· · · · · · · · ·									
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·		1 ₂ V ₃	Vy	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·								
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	1	4	4	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·								
••••						· · · · · · · · · ·									
· · ·	· · · · · · · ·		· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·								
· · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·								
· · ·	· · · · · · ·					· · · · · · · · · ·									



		A GREEDY A	PPROACH	
Among	feasible	vertices, celect	one with	maximum Weight.
<td> .</td> <td>V_1 V_2 1 4</td> <td>V₃ V₄ 5 4</td> <td>Wt = 6</td>	.	V_1 V_2 1 4	V ₃ V ₄ 5 4	Wt = 6
		$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}$	3 Vy 5 4	MT = 8

		A GRE	EDY APPRO	ACH	· · · · · · · · · · ·	
Among	feasible	vertices,	select one	with	maximum	Weight.
. .		V (1	V_2 V_3 V_4 5	Vy A	wt = 6	
· · <td></td> <td></td> <td>V_2 V_3 V_4 5^-</td> <td>Vq −O 4</td> <td>mf = 8</td> <td>····································</td>			V_2 V_3 V_4 5^-	V q −O 4	mf = 8	····································

								*	•					• •				*						*					•							•						
									. Å		-				_	• •	0									-1	N - A	-			-	. 1										
									ľ	٢.		21	V.	ID	E		X		. C	10	11	31	JE	K	ζ.	f	11	"M	K C) A	ίC	Н										
										•										•		-1					• •		. –		•											
									• •					• •				•	•										•							•						
					•		•						•	• •																						•	•					
					•	•	•	•					•	• •				•					•						•							•		-			• •	
						•			• •				•	• •				•						•	• •				• •							•	•			•	• •	•
									• •					• •				•	• •					•	• •				• •							•	• •				• •	•
																													• •													
,																																										
				•	•	•			• •						•	•		•	• •					•			•	•	• •				• •	•			• •				• •	
																																				•	• •					
									• •					• •				•	•										•							•					• •	
					•		•						•	• •																						•	•					
					•	•	•	•					•	• •				•					•						•							•		-			• •	
						•			• •				•	• •				•						•	• •				• •							•	•				• •	•
									• •					• •				•	• •					•	• •				• •							•	• •				• •	•
																													• •													
									• •					• •											• •								• •								• •	

A DIVIDE & CONQUER APPROACH													
Recursively compute	ind. set fo	or left and nig	ght halves and	combine the solutions									

· · · · · · · · · · · ·	A DIVIDE & CONQUER APPROACH													
Recursively	compute	ind. set	for left	, and	night halves	and combine	the solutions							
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·							
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	v v v v v v v v v v v v v v v v v v v	V2	V ₃	V _q	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·							
· · · · · · · · · · ·			 		<u> </u>		· · · · · · · · · · ·							

· · · · · · · · · · ·	A DIVIDE & CONQUER APPROACH													
Recursively	compute	ind. set	for left and	night halves and	combine the solutions									
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·									
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	ν	V2 V2	Vq										
· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	1	4 • 5	4										
· · · · · · · · · · ·		· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·										
· · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·									
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·									

· · · · · · · · · · ·	A DIVIDE & CONQUER APPROACH													
Recursively	compute	ind. set	for left	and night halves	and combine	the solutions								
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·								
		· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·											
	· · · · · · · ·				· · · · · · · · · · ·									
		1114	4	5111411										
			· · · · · · · ·											
			· · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·									

· · · · · · · · · · ·	A	DIVIDE	8 CONQUES	R APPROACH		•
Recursively	compute	ind, set -	for left and	night halves and	combine the Solution	2
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·		•
			· · · · · · · · · · · · ·			•
			V_2 V_3	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		•
			\mathbf{V} , \mathbf{V}			•
		<mark>1</mark>	4	4		
						•
						•
		Not class	have to a	a college Com Chiet	e	
				lesure confuct		

A	DIVIDE	8 CONQU	ver Ap	PROACH	· · · · · · ·		
Recursively comput	e ind set	for left a	ind night	halves and	Cambine	the	Solutions
		· · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · ·			V ₃	4 • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	· · · · · · ·	· · ·	· · · · · ·
	· · · · · <u>1</u> . · ·	4	5		· · · · · · · ·	· · ·	
	Not cle	can how to	o resolve	- Conflict	۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰	· · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · ·	· · · · · ·
)(n ²) algor	uthm with	four	hecursive	calls	· · ·	· · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · ·	· · · · · ·

													• •									• •			• •				• •			1	• •			•	
										\ ^	-		· • •			-			. .	_	· .				<u>.</u>												
									. t	バ	1	11	ግ /	Ł		2	U	B.	57	T.K	20) C	Τ	U	Rt												
											Ţ		. 1							•																	
																																				• •	
				•			•								•	•	•	• •		•			•				• •		• •			•	• •			• •	
																																				• •	
•			•	•					•				• •	•			•	• •		•	•	• •	•		• •	•	• •		• •			•	• •			• •	
			•										• •				•				•	• •			• •				•			•				• •	
			•	•				•	•		•		• •			•	•	• •		•	•	• •	•		• •	•	• •		• •		•	•	• •	•		• •	
			•						•				•				•				•	•			•				•			•			•	• •	
			•						•				• •				•	• •			•	• •			• •		• •		• •		•	•	• •	•		• •	•
			•	•					•				• •			•	•	• •			•	• •			• •		• •		• •			•	• •			• •	
			•																		•	• •							• •	•		•					
													• •									• •							• •			•					
		0																																			

• •		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•) P	T	-1	2	1/	ŧ	•	-	S	J	B	S	T	R	J	C	Т	Ū	R	E	•	•	•	• • • •	•	•	•	•	•	•	•	•	•	· ·		•	•
• •		Id	eø		•	•	0	P	tin	m	ฟ	L.	•	2	0	M	łi	07	ر	•	0	f	•	e e	י י ע (। U	لم	JJ	L	ŀ	γ	ob	~[e	Arr Arr		k	νU,	iH	- -	ίΛ	þ	۲	fr	٥Y	n	•	•	•	· ·		•	
•		•	•	•	•	•	0	51	, Ìn	nø	L		S	s lu	nt	10' 10'	n	•	0	F	•	2	I	b .	þ	ŶŶ	6	١.	m	ِگ ا	•	j.	n	•	Â.	•	Þ	» ~	23	Ċ	νļ	oe.	L	. V	الم ر	ay		•	•••	•	•	•
•		•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•		•		•		•	•	•	•	•	•		•	•			•	•	•	•	•	•		• •			•	•	•	0			•	•••	•		•
• •				•				•	•	•	•			•			•																•	•	•		•	•					•		•		•	•		•		
														•																							•	•							•			•			•	•
•					•	•	•	•	•		•	•			•		•		•	•		•											•	•		•	•	•	• •			•	•	•	•	•	•	•		•		•
								•						•			•		•	•	•													•		•	•	•	• •						•		•	•	• •	•		
									•																						•		•				•	•	• •	•								•				
																																													•		•					
	-													•	•																					•	•	•							•	•	•	•			•	•
•				•				•		•	•			•	•	•	•	•			•													•		•	•	•	• •			•		•	•		•	•			•	•
			•	•				•		•	•		•	•			•				•											•	•	•		•	•	•	• •						•		•	•				•
																																						•	• •													

	OPTIMAL SUBSTRUCTURE
Idea	Optimal solution of overall problem built up from optimal solution of subproblems in a prescribed way.
Hope	Need to consider only a few subproblems — manageable!
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · ·	

Notation : Path graph $G = (V, E)$ $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_{n-2} \longrightarrow v_{n-1} \longrightarrow v_n$
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

	Ol	PTIMAL SU	BSTRUCTURE	
Notation :	Path graph	G = (V, E)	V ₁ V ₂	$- V_{n-2} V_{n-1} - V_{n}$
· · · · · · · · · · ·	$het S \subseteq V$	be a max	weight independ	lent set (MWIS).
	· · · · · · · · · · ·			

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•				•	•			C) f	7	٢1	1	1	A	L	•	2	U	e	55		٢I	RI	J (C	T	U	R	E	•	•	•	•	•	•	•		•		•				 		
	 ∖ 	۰ 0 آ	t	at	ໂຈງ	n	:	•	ł	0	nt	h			}	e G	þ	h l	•		6	ł	2		Ì,	E	E)	•	•	•	•		V _i	- - -	•	•	ľV I	2		•	· · ·	•		•	•	Ŭ, M	- 2	•		V m	i-1		 	V,	۰ ۱
•	•	•	•	•	•	•	•	0	Ľ	et	t	•) -	2		,	V,	•	Ľ)و	-	. (λ	•	r 1 1	101	X	•	ŀ	Je	ìg	h	t	•	ir	nd	وا	je/	nc	le	nt	シ	۲ ک	se	t)) (۲ ۲	Ĭ	ן ל ן	S)).	• •	 	•	•
•	Co		2		h7	\ @	1 (2 2 2	12		•	•	•	E	- • - • - •	th	ع م		•	V.	n	Ę	Ĺ			•	•	0) 0)	r	•	•	۰ ۷	n N	ŧ		S	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	 	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	 	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		 	•	•
	•		•	0											•											0	•		0	0	0	0				0			•		0												 		
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•				•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	 	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•							•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•		•	•	•			• •	 		•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •	 	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•					•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		 		•
			•			•		•					•													•			•		•									•	•	•						•			•				

· · · · · · · · ·	· · · · · ·	OP	TIMA	L Su	BSTRU	CTURE	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·
Notation :	Path	graph	G =	(V, E)	.	,, V₂,,	$ V_{n-2} - V_{n-1}$	v _n
· · · · · · · · · ·	het.	2 <u>c</u> V	be a	max	weight	independent	set (mwis)	· · · · · · ·
Case analy	212	Either	v _n ∉	S (or Vn	eS		· · · · · · ·
Case I:	V _n ∉S	5	· · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·
Case TL :	VES	· · · · ·	· · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·
	m - 2		· · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·			· · · · · · ·
· · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · ·		 	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·
· · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · ·	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·

OPTIMA	L SUBSTRU	CTURE	· · · · · · · · · · ·	
Notation: Path graph G =	(V, E) V1	······································	$ V_{n-2} - V_{n-1} -$	v _n
Let $S \subseteq V$ be a	max weight	independent	set (MWIS)	· · · · · ·
Case analysis: Either vn &	s or vn	€S.		· · · · · ·
Case I: $V_n \notin S$				
Let $G' := G \setminus \{v_n\}$	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
CASE I My ES	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·
		· · · · · · · · · · · ·		
	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·	

· · · · · · · ·			• •	Of)TII	MA	L	U2	BS	TR	U C	T	JRI	E	• • •				• •	• •		• •	
Notation	: P	oth	gru	aþh		q =	(V,	E)	· · ·	•••	v"i ∶	• •	- V ₂	· · ·	· · · · ·	·	— (j - n-2	· · ·	V n-	- ti	· · ·	V _n
· · · · · · · · ·	i Le	!t .	⊆ 2	V	be	n N		ax lax	W	eigh	t	in	tep	end	ent	2	et	(m	ίW	ر (حرا	· ·	• •	• •
Case ano	ly sis		Fif	han i	 	d d		· ·	 		N.			• •	• • •	• •	••••		• •	• •	• •	• •	
Case T	.↓ V	d s	,	net.	, ^v .n		ے	· · ·	JIC		'n		,					•	•••				
	i 'n				د. د. ۲	• •		• •		• •	0			• •			•••						, . 1 .
	het	Ğ	<u>'</u> =	91	{V _n }	•	he	en,	2	2Í :		210) (λη	In	dep	ende	int	اک ^ر	et	04	9	••••
Case	4		• •		• •	• •	• •	• •		• •	•	• •		• •	• • •	•••	••••	•	• •	• •		• •	
Case I	°	€S	· ·	· · · ·		· · ·	· · ·	· · ·	· · · ·	· · ·	•	· · ·	· · ·	· · ·	· · · ·	· · ·		•	· · ·	· · ·	· · ·	••••	
Case I	. ν. ν. 	€S	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·			•	· · ·						•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
Case I	ν. ν _γ	€S	 . .	· · · · ·		 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
Case I	۲. V _M	E S	 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		 	<															

· · · · · · ·	· · ·	· · · ·	OP	TIM/	HL SU	BST	r NC	TURE				· · · · · ·
Notation	P :	ath g	raph	G =	-(V, E)	· · ·	, v _i -			- V	- V	
 	Le	2 t	⊆ V	be a	Max	We	ight	independ	ent s	et (m	WIS)	· · · · · ·
Case an	rlysis	e e e e	ither	V _n ∉	s S	0r	V _n e	es			· · · ·	· · · · · ·
Case I	Vn	¢S	· · · ·		· · · · ·	· · · ·						· · · · · ·
	het	G' :=	=	[v _n]	Then	2,) 2Í	also an	indep	endent	Set of	G'
 		· · · ·			\Rightarrow	S	must	be a n	nax w	t ind	set of	G'.
Case I	, '	€S										
· · · · · · ·		· · · · ·	· · · · ·		· · · · ·							· · · · · ·

		C	PTIM	AL SU	BST	RUC	TUR	E		· · · · · · ·	· · · ·
Notation	: Pat	h grap	h G	=(V, E)	· · ·	, v _i ,	<u> </u>	2 , ,		<u> </u>	— v _n
· · · · · · · · ·	het	v <u>م</u> 2	be o	i max	We	ight	indef	sendent	set (m	(WIS)	· · · · ·
Case ano	lysis !	Either	t Vn €	2 S	or	V _n e	≘S.	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · ·
Case I	V _n ∉	Ś				· · · · ·					
	het	G':= G	\{v _n },	Then	2,	0 2Í	olso	an in	lependent	set of	G'
				\Rightarrow	S	must	be	a max	wt ind	set of	G'.
Case I	' V _n €	S									
· · · · · · · ·	Then,	V _{n-1} ∉	S.	· · · · ·	· · ·	· · · · ·	· · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·	
· · · · · · · ·											
· · · · · · · ·		· · · · · · ·				· · · ·		· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·	

OPTIMAL SUBSTRUCTURE	
Notation: Path graph $G = (V, E)$ $V_1 - V_2 - \dots - V_{n-1}$	$\frac{1}{2}$ v_{n-1} v_n
het S S V be a max weight independent set (1	NWIS)
Case analysis: Either $v_n \notin S$ or $v_n \notin S$.	
$Case I: V_n \notin S$	
Let $G' := G \setminus \{v_n\}$. Then, S is also an independent \longrightarrow S must be a max set independent	set of G'
Case \mathbb{I} , $\mathbb{V}_{n} \in S$	<u> </u>
Then, $V_{n-1} \notin S$. Let $G'' := G \setminus \{V_{n+1}, V_n\}$	

OPTIMAL SUBSTRUCTURE
Notation: Path graph $G = (V, E)$ $v_1 - v_2 - \dots - v_{n-2} - v_{n-1} - v_n$
Let S E V be a max weight independent set (MWIS).
Case analysis: Either $v_n \notin S$ or $v_n \notin S$.
Case I: $V_n \notin S$
Let $G' := G \setminus \{v_n\}$. Then, S is also an independent set of G' .
\Rightarrow S must be a max wt ind set of G'
Case \mathbb{I} , $\mathbb{V}_{n} \in S$
Thin, $V_{n-1} \notin S$. Let $G'' := G \setminus \{V_{n+1}, V_n\}$.
Then, S\{Vn} is an independent set of G".
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

OPTIMAL SUBSTRUCTURE
Notation: Path graph $G = (V, E)$ $V_1 - V_2 - \dots - V_{n-2} - V_{n-1} - V_n$
Let S E V be a max weight independent set (MWIS).
Case analysis: Either $v_n \notin S$ or $v_n \notin S$.
Case I: $V_n \notin S$
Let $G' := G \setminus \{v_n\}$. Then, S is also an independent set of G' .
\Rightarrow S must be a max wt ind set of G'
Case \mathbb{I} , $\mathbb{V}_{n} \in S$
Thun, $V_{n-1} \notin S$. Let $G'' := G \setminus \{V_{n+1}, V_n\}$.
Then, S\{Vn} is an independent set of G".
\Rightarrow $S \setminus \{v_n\}$ must be a max wt ind set of G'' .

• •	•	•	•	• •	• •	•	•	• •	•	•	•	C)P	T	1	1/	łL		ς	JB	S	T	Ry	JC	7	Ů	RE		• •	•	•		•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •
• •	•	if	• 1	In	¢	Ś	5	• •	•	•	•	• •	•	•	•	• •	•	• •		•	•	· ·	•	•	· ·	•	• •	•	• •	•	•		•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •
••••	•	•	•		7	, " (. "	S	ŗ	Νù	st	į	و	0	N,	m	.ax	- 6	vt	i	nd	•	2 e	t	0- 1	f i	G'		= '(٩ \	۲. م	'n] '	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	
· ·	•	if	· · V	'n	E	S	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	•	• •	•	• •		•	•	· ·	•	•	· ·	•	•	•	••••	•	•		•	• •	•	•	•	· ·	•	•	· ·
• •	•	•	•		₹		S S	\ {\ \	J n	2	n m	ust		be	•	0 0	n Tr	\ a	× 1	W-	ł	lr	d.	2	et	0	f	e	, 4 	1 1 1	· · (Ĩ	\ 	٤v	n ⊣	?	v Vn	} }	•	•	· ·
	•	•	•			•	•		•	•	•			•	•		•	• •		•			•	•		•		•		•	•		•	• •		•			•	•	
																• •																			•						
								• •							•	• •					•		•	•		•				•					•	•					
• •					• •			• •			•	• •	•	•	•	• •		•			•	• •			• •				• •					• •			•				• •
• •				•	• •			• •				• •			•	• •	•	•			•	• •	•		• •	•			• •		•			• •			•				• •
				•								• •						•																			•				
• •				•	• •			• •			•	• •	•	•	•	• •		•			•				• •				• •					• •		•	•				• •
		•	•						•		•				•																•										

OPTIMAL SUBSTRUCTURE
if V _n ∉ S
\Rightarrow S must be a max wt ind set of $G' := G \setminus \{v_n\}$.
$if v_n \in S$
\Rightarrow $S \setminus \{v_n\}$ must be a max wt ind set of $G'' := G \setminus \{v_{n+1}, v_n\}$
We don't know which case we are in.
Only need to think about two subproblems!

•	•	•	•	•	•	• •		•	•	•	•	•	•		D	P	T	11	4	A	Ļ	•	2	U	B	S	Tl	Ri	J (Ţ	Ŭ	RE		•	•	•	· ·	•	•	•	•	• •			•	•	•	• •
•	•	•	•		Ι	dei	a :	•	•	Ţ	iy Y	•	b	oł	k k	•	þ	8 0	گ	bì	lì	 	e	2		Or	d	•	re	-tu	NN	N	-	h (2		ور-	t+ı	٨		02 0	lu	ti	0 Y	۱.	•	•	•	•••
						• •							•	•																			• •				•					•		•	•		•		• •
					•	• •					•		•	•	•	•	•	•	•	•	•					•				•		•	• •	•			•	•			•	•	•	•	•		•	•	• •
•		•	•			• •							•	•	•	•	•	•	•	•	•	•								•	•	•	• •	•			•				•	•	•		•	•	•	•	• •
						• •							•	•	•	•	•	•	•	•	•	•								•		•	• •	•			•				•	•	•			•		•	• •
					•	• •					•		•	•						•	•	•								•	•		• •	•			•				•	•				•	•		• •
		•																								•			•																				
						• •							•	•																			• •				•					•		•	•		•		• •
•						• •									•	•	•	•	•	•													• •				•							•	•	•	•	•	• •
•	•		•			• •	-		•				•	•	•	•	•	•	•	•	•	•									•		• •									•	• •	•	•	•	•		• •
•	•		•			• •					•	•			•	•	•	•	•	•		•	• •					•			•	•				•							•			•	•		• •
•	•		•		•	• •					•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	• •			•		•		•	•	•	• •			•						•	• •			•	•	•	• •
						• •							•	•						•	•					•				•			• •	•			•				•	•	•						• •

•	•	•	· ·	•	•	••••	•	•	· ·	•	•	•	Df	רי		4,	AL	•	2	V	B	ST	r P	U	C	T	UR	E	•	• •	•	• •	•	•	· ·	•	•	•	• •	•	•	• •
•	•	•	· ·	1	de	a!	•		In	{	b	οH		ŀ	008	۰ آگ	bì	h.1	ìe	2	· ·	Om	d	- h	et	e N	M 1	-+	he	· ·	be	-{-{•	ر الح ا		30	nt	10 10	γ η .	• •	•	•	• •
•	•	•	· · ·	Y	οι	· · ·		u F	tr	و	U C	For	K I	ر	<u>کر</u>	νZ'	J	? ?	•	1	NZ	'ŧ	۲	th	21	j	uc f	t	6	rnt	ē	f) T.C	e	7	, .// 	k .	•	• •	•	•	• •
			• •																					• •			• •			• •												
	•	•	• •	٠		• •			• •			•					• •		•	•	• •			• •			• •	٠		• •		• •			• •		•	•	• •	•		• •
•							•		• •	•								•				•							•		•								• •		•	
																											• •					• •							• •			
•	•	•	• •			• •							• •			•	• •			•	• •			• •			• •			• •		• •			• •				• •	•		• •
•	•		• •	•		• •	•	•	• •	•			• •			•	• •	•		•	• •	•		• •			• •	•		• •		• •		•	• •	•	•		• •	•		• •
•	•	•	• •			• •	•		• •	•			• •			•	• •	•		•	• •	•		• •			• •		•	• •	•	• •			• •		•		• •	•	•	• •
•	•	•	• •			• •	•		• •	•			• •				• •	•		•	• •	•		• •		•	• •		•	• •	•	• •			• •		•		• •	•	•	• •
	•	•	• •			• •							• •				• •				• •			• •			• •					• •			• •						•	
																																							• •			
•	•		• •																					• •								• •							• •			• •
•	•		• •			• •							• •			•	• •			•	• •			• •			• •			• •		• •			• •				• •	•		• •
													• •											• •															• •			

OPTIMAL SUBSTRUCTURE Idea: Try both possibilities and return the better solution. You Are you chazy? Isn't this just brute force? I AM NOT CRAZY **MY MOTHER HAD ME TESTED**

0	TIMAL SUB	STRUCTUR		· · · · · · ·	· · · · · · ·
Idea: Try both	possibilities	and return	the better	solution	· · · · · · · · ·
You Are you	chazy? Is	n't this just	5 brute forc	e ? "	
I AM NOT CRAZY	This	s is necursi	sely organiz	ked brute	force
		· · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
MY MOTHER HAD ME TES	STED	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·
		· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · ·

OPTIMAL SUBSTRUCTURE
I dea: Try both possibilities and return the better solution.
You: "Are you crazy? Isn't this just brute force?"
LAMINOT GRAZY This is necursively organized brute force.
By eliminating redundant computations,
MY MOTHER HAD ME TESTED we can solve the problem in linear time.