COL 3	51 : ANALYCIS	& DESIG	AN OF AL	GORITHMS	· · · ·
. .	LEC	ture 1			
· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	GRAPH A	LGORITH	tms IV:	· · · · · · · · · · · · · ·	· · ·
TOPO LO GI CAL	ORDERING ¢	STRONGLY	CONNECTE	ED COMPONENT	2
Topo Lo Gi cal	ORDERING ¢	STRONGLY	CONNECTE	ed Component	T

Applica-	TIONS OF BFS	
Shortest paths		
. .		
Connected Components		

					• •				• •		• •													• •		• •									
									. 4	_	~					•	-					•	-												
										Εl	77	Η	-	•	-11	R (5	Γ.		S F	=A	IK	Ċ	H.											
÷																																			
									• •														•	• •		• •									
				•	• •				• •		•												•	• •		• •		•			•				• •
				•	• •			•	• •															• •		• •		•			•	• •			• •
				•	• •				• •		•												•	• •		• •		•			•	• •			• •
				•	• •						•															• •		•	•		•			•	• •
								•																				• •							
																													•						
																			•						•										
									• •														•	• •		• •									
					• •				• •														•	• •		• •						• •			
	•	•		•	• •	•		•			• •					•		•										•			•	• •	•		• •
				•	• •			•	• •															• •		• •		•			•	• •			
				•	• •			•	• •		•												•	• •		• •		•			•	• •	•		
		•		•	• •			•			• •																	•	•		•	• •			• •
		•		•	• •			•	• •		• •													• •		• •		• •			•				• •
											• •															• •		• •	•		•				• •
																				•															

•		t	EPTH - FIRST	SEARCH			
•	Iterative version	\tilde{n}				· · · · · · · · · · ·	
		· · · · · · ·		· · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	
•							
	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·	
•							
•			· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·	
•	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	
•	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · ·	
				· · · · · · · · ·			
	· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·			
	· · · · · · · · · · · · ·						

DEPTH-FIRST SEARCH
Iterative version
mark all vertices as unexplored
S := a stack data structure (LIFO), initialized with s
while $S \neq \emptyset$
premove the top node of S, say V ("pop")
if V is unexplored
mark v as explored
for each (v, w) in adj. list of v
L L add w to the front of S ("push")

D	EPTH - FIRST	SEAR	сн	· · · · · ·	· · · · · · · ·
Recursive version		 	· · · · · · · · · · ·	 	· · · · · · · · ·
DFS (G, s)	// all	vertias	unexplored	before	the call
mark s as	explored		· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · ·
for each (S, V)	in adj. list	of 2	· · · · · · · · · · · ·	 	· · · · · · · · · ·
if v	is un explore	ed			· · · · · · · · ·
	DFS(G, v)	 	· · · · · · · · · · · ·	 	· · · · · · · · ·
				· · · · · ·	· · · · · · · · ·

· · · · · · · ·		APPLICATIONS	96 Dez	· · · · ·		
· · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· ·	· · · · · · · · · · ·	 		
· · · · · · ·	To pologi cal	ordering		· · · · ·		
· · · · · · ·	Strongly Ce	innected Compone	nts	· · · · ·		
· · · · · · ·				· · · · ·	· · · · · ·	
 	· · · · · · · · · · · ·					
<u>.</u>		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·			

. .	.	APPLICATIONS	0F DFS	<th> </th> <th></th>		
	Topological Strongly Cor	ordering inected Compone	mts		<th> .</th> <th> </th>	.	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · ·	· · · · · ·		
· · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · ·			

TOPOLOGICAL ORDERING Directed graph G = (V, E)A labeling f of G's vertices such that * unique f(v) E { 1,2, -, n} for every veV * for every $(v, w) \in E$ f(v) < f(w).

	TOPOLOGICAL	OPDEPINC			
	TOPOLO GICAL	UNVERNA			
	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · •	• • • •		 • • • •
			• • • •		 • • • •
			• • • •		 • • • •
$(\mathbf{v} + \mathbf{v} +$			• • • •		 • • • •
	(t)				
<u>(S)</u>				• • • • •	
	$\mathcal{A} = \mathcal{A} = $				
				• • • • •	
\rightarrow				• • • • •	
(w)					
					 • • • •

			••••••		
	TOPOLO GICAL	ORDERING			
					 • •
					 • •
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					 • •
$\mathcal{A} \to \mathcal{A} \to $					 • •
a a a a a a a a a a a a a a a a a a	\sim				 • •
					 • •
					 • •
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	(t)			• • • •	 • •
	$\mathcal{A} = \mathcal{A} = $				 • •
					 •
					 • •
(w)	ζ				 • •
	• • • • • • • • • • • •				 •
					 •
					 • •
					 • •
			• • • •		

TOPOLOGICAL ORDERING ٧. S t S ٧-W W

TOPOLOGICAL ORDERING S t S W Ś ۸. S t S W

	TOPOLOGICAL ORDERING									
Theorem :	Every directed	acyclic graph	has at least one	topological						
	Ordering.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·						
· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·						
· · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · ·						
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · ·						
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·						
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·						
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							

TOPOLOGICAL ORDERING								
Theorem :	Every directed ordering	acydic graph	has at least one	- topological				
kemma:	Every directed	acyclic graph	has at least one	sink,				
· · · · · · · · · ·			a vertex with no	outgoing edges				
· · · · · · · · · ·				· · · · · · · · · · · · · ·				
· · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·				
				· · · · · · · · · · · · · ·				

TOPOLOGICAL ORDERING										
Theorem :	Every di ordering	rected acyclic	graph has at	least one topological						
	V		to sink vert	ex V (exists!)						
				directed acyclic 🗖						
	· · · · · · · · ·									
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						
	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·							
· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						
· · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							

	Top	POLOGIC	al or	DERI	NG	· · · ·		· · · · · · · · · ·	· · ·
Theorem : Every	directed	Acyclic	graph	has	at	least	one	-topological	· · · ·
onde	king .	N	· · · · · ·	· · · · ·	· · ·	· · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · ·
Algorithm				· · · · ·					
1 Find 0	l Sink	vertex V	· · · · · ·	· · · · ·	· · ·	· · · ·	 	· · · · · · · · · ·	· · · ·
2. Assign t	o it the l	agut a	vailable	labe	L i	· · · ·	 	· · · · · · · · · ·	· · ·
	where on	V		· · · · ·	· · ·	· · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · ·
· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · ·	· · ·	· · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · ·
			· · · · · ·	· · · · ·				· · · · · · · · · ·	

e topological
• • • • • • • • • • • • • •
rectness
v]=i,
from v to
ith f[v] < i

TOPOLOGICAL ORT	dering
Theorem : Every directed acyclic graph	has at least one topological
Ordering.	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Algorithm	Running time
1 Find a sink vertex v.	
2. Assign to it the largest available	label
and hearse on Gl[v].	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

	TOPOLO GIO	AL ORT	>ERING		
	directed acyclic	graph	has at	least one -	topological
Algorithm	ring .	· · · · · · · · ·			
	sink vertex	V>	0(n)	Running	time
	o it the largest c			0(n ²)
	ource on G/EV			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
		· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · ·

TOPOLOGICAL ORDERING	
heorem: Every directed acyclic graph has at	least one topological
Ordering.	
Algorithm	Running time
1. Find a sink vertex $V \longrightarrow O(n)$	
2. Assign to it the largest available label	$O(n^2)$
and hearse on G\{v}.	Can we do better
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	for sparse graphs?
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

					*					•									•				•														* 1	ł
								 	-	•											.	•						_										
									0	Po		Ð	6	16	A	·	0	R	D	E	K1	N.	6	vi	A	۲.	DI	-0	7									
									•		-		۲		-		v			•	_		T	•••	•			FS										
																										• •		• •										
				•	•	•				•				•					• •			•	• •	•	•			• •		•	•	• •			•			1
			•	•	•									•				•					•	•	•	• •		• •			•	• •		•	• •			•
				•	•	•				• •				•					• •				• •			• •		• •			•	• •		•			•	,
																															•			•				
																																						ĺ
																										• •		• •										
										• •				•					• •				• •					• •			•	• •		•			•	1
				•	•				•					•									•					• •			•	• •		•	•			1
			•	•	•									•				•					•	•	•	• •		• •			•	• •		•	• •			1
			•	•	•	•				•				•									•					• •			•	• •		•	• •		•	
				•	•	•			•	• •				•					• •				• •			• •		• •			•	• •		•				
										• •																												
												•						•								• •										•		
																												0 0										
										•									• •			•	• •			• •		• •							3 0			1
*			•	•	•	•			•	•				•					• •			•	• •			• •		• •			•	• •						ſ
				•	•	•			•	•				•				•	•			•	•			• •		• •			•	• •		•	•		•	•

	OPOLOGICAL	ORD	ERING	Via	DFS			•
DFS pseudocode	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	 	· · · · ·	· · · · · ·	 		•
DFS(G, s)		1 all	Vertius	unex	plored	before	the call	•
mark s	as explored	· · · · · ·	 	· · · · ·	 	 	· · · · · · · · · ·	•
for each	(s,v) in adj	list	of 2	· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · · · · ·	•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	f V is un	explor	d	· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · ·	•
	DFS (G,			· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · ·	•
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · ·	•
	· · · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	· · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · ·	•

TOPOLOGICAL O	RDERING VIA DES
	DFS (G, S) // all vertices initially unexplored
	() // MI VALING UNEXPORE
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	mark s as explored
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	for park (cut in adi, list of c
	for each (s, v) in adj list of s
	if v is unexplored
	L DFS (G, V)
	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •

	TOPOLOGICAL O	RDERING VIA DFS
DFS - Loop (G)		DFS (G, S) // all vertices initially unexplored
		mark s as explored
		for each (s, v) in adj. list of s
· · · · · · · · · · · · · · · · ·		if V is unexplored
		L DFS (G, V)
· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	

TOPOLOGICAL O	RDERING VIA DFS
DFS - Loop (G) mark all vertice unexplored current_label := [V] // labeling f	DFS (G, s) // all vertices initially unexplored mark s as explored
	for each (s, v) in adj. list of s
	if v is unexplored
	L $DFS(G, v)$

TOPOLOGICAL O	RDERING VIN DFS
DFS - Loop (G) mark all vertice unexplored current_label := [V] // labeling f	DFS (G, s) // all votices initially unexplored mark s as explored
for each v e V	for each (s, v) in adj. list of s
if v is unexplored L DFS (G, v)	if V is unexplored L DFS (G, V)

TOPOLOGICAL O	RDERING VIA DES
DFS - Loop (G)	DFS (G, s) // all vertices initially unexplored
mark all vertice unexplored	mark s as explored
current_label := $ V $ / labeling f	for each (s, v) in adj. list of s
for each $v \in V$	if v is unexplored
l if v is unexplored	L DFS (G, v)
L DFS (G, v)	Set $f[s] = cmunt - labeldecrease commt - label by 1$

				• •					_					•				•									• •			_		•	• •						
									. ()P	0	D	6	10	'A	tL		0	R	D	El	KI	N	6	. 1	vi.	 R .	5	Dł	-(7								
									• •												-			1.															,
																																							,
																																							,
																			1																				
																		·		. /																			
																			Ļ)																		
																	/.					\sim	<																
															~>	/ .							. \	-															
														(\underline{s})	2)								•	t)													• •	
									• •			• •		6	ノ					• •				Ľ	Γ.		• •						• •					• •	
															• •	$\overline{\ }$						•					• •			• •			• •					• •	
															• •			ς.			/	/.					• •			• •			• •			• •		• •	
															• •			لار ا	-		/ .						• •			• •			• •			• •		• •	ł
				• •					• •			• •			• •				(V	J)			•	•			• •			• •			• •			• •		• •	
		•	•	• •	•	•			• •		•	• •			• •		•			/.			•	•			• •			• •		•	• •			• •		• •	ł
		•	•						• •		•	• •			• •								•				• •			• •						• •		• •	
			•	• •			•		• •		•	• •			• •				•	• •			•				• •			• •		•	• •			• •		• •	
			•	• •			•	•	• •		•	• •			• •				•				•				• •			• •		•	• •			• •		• •	
•			•	• •	•			•	• •		•	• •			• •				•	• •			•				•			• •		•	• •			• •	•	• •	
		•	•			•	•		• •		•	• •			• •				•				•				• •			• •		•				• •		• •	
•	•		•	• •	•	•	•	•	• •		•	• •	•		• •				•	• •			•				• •			• •		•	• •		•	• •		• •	
			•	• •	•				• •		•	•			• •		•			• •			•				•			• •		•	• •			• •	•	• •	
•			•			•	•		• •		•	• •			• •				•				•				• •			• •		•	•			• •		• •	
		•	•								•	•			• •							•	•				• •			• •			• •			• •		• •	
	•		•	• •	•	•	•	•	• •		•	• •			• •		•		•			•	•		•		• •		•	• •		•	• •			• •	•	• •	
	•		•	• •	•	•	•	•	• •		•	• •			• •		•		•			•	•		•		• •		•	• •		•	• •			• •	•	• •	
				•			•	•	•			•			• •				•	•							•			• •		•	•		•	•		•	
				•			•	•	•			•			• •				•	•							•			• •		•	•		•	•		•	
				• •					• •			•			•					•							•			•			•						6

•	•	•	• •	•	•	••••	•	• •	•••	Т	o P) 0	10	9	C	A		C)R	D	E	RI	N	G		Vi	n 1	T)F	2	•	•••	•	• •	• •	•	•		•	•	
																						- ('ta	wt.		D	FS	-1.	امم	. .	hoi	0.									
																						1.0		v w					<u>`</u>		ųν										
																					V																				
																			-(V	· ·																				
																		· · .	1	Ľ	Ł.																				
											• •				• •			/	~			<u>\</u>					• •														
											• •						/			• •			X				• •							•							
			• •		•	• •					• •		• •		· _ ·	\checkmark					•		1	-	<u>`</u>	•	• •		• •			• •		•				• •			
•		•	• •		•	• •					• •				(S)				• •			· ((t)	•	• •		• •					•				• •			•
•			• •		•	• •					• •		• •			~	•			• •			. 7	r	/.	•	• •		• •					•							•
•		•	• •		•	• •					• •	•	• •		• •		$\overline{\ }$			• •			/	• •	•	•	• •		• •			• •		1				• •			•
•			• •		•		•				• •		• •	•	• •			· _ ·		• •		/-	•	• •		•	• •		• •				•	•					•		
•		•	• •			• •		•			• •		• •		• •				۲۲.		/ 1			• •		•	• •		• •			• •		•			•	• •		•	
			• •		•						• •		• •	•	• •					W)			•			•	• •						•	•				• •			•
		•	• •			• •					• •	•	• •		• •					<u> </u>				• •		•	• •		• •			• •					•	• •			
		•	• •								• •				• •					• •			•			•						• •									
																																									Î
			• •								• •				• •									• •			• •		• •												
			• •								• •				• •					• •				• •			• •							•							

																								•													•		
									T	DF	0	L	06	51 -	C	łL		0	R	D	ek	21	N (6	. V	ti (λ.	T)}	25									
														1				Ū						T,															
																			\cdot																				
																		·																					
									• •								•	/																				• •	
									• •				• •				/.				•															• •		• •	
									• •				• •		<u> </u>	/ 1						•	Ľ	~		•			• •										
			•						• •		•		• •	(\mathcal{S}) ·							· (t)	•			• •						•	• •		• •	•
			•						• •			•	• •	7		, ·			•				-	Ů	/.	•	•	•	• •			•			•	• •	•	• •	•
			•						• •		•	•	• •		•	. \	<u> </u>						<u>/</u> ',			• •			• •							• •	•		•
			•				•		• •		•		• •			• •		Υ.	•		/	/.	• •			•			• •			•			•	• •	•	• •	•
			•				•		• •		•		• •			• •		ر ال	1	\checkmark		•	• •			•			• •			•			•	• •	•	• •	•
			•						• •				• •			• •			(v	J)			• •			•			•			•			•	• •	•	• •	•
			•						• •		•	•	•		•	• •			.~	/.		•	• •			•		•	• •						•	• •	•	• •	•
	•		•	• •			•		• •	•		•	• •		•	• •			•			•	• •			•		•	• •	•		•	•		•	• •	•	• •	
			•						• •			•	• •			• •			•				• •			•			•								•	• •	
			•	• •			•		• •				• •			• •						•	• •			•			• •						•	• •	•	• •	
	•		•	• •			•		• •				• •			• •		•	•			•	• •			•		•	• •			•	•	•	•	• •		• •	
			•								•	•	•		•	• •							• •		•				• •								•		
				• •			•		• •				• •			• •						•	• •						• •							• •		• •	
		•							• •				• •			• •		•					• •						• •		•			•		• •		• •	
		•			•	•		•	• •				• •			• •		•	•				• •						• •		•			•		• •		• •	
		•			•	•		•	• •				• •			• •		•	•				• •						• •		•			•		• •		• •	
							•			•			• •									•						•	• •	•						• •		• •	
				• •			•		• •	•						• •						•	• •			• •		•		•			•			• •		• •	

•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	· · ·	•	T	D P (06	41 C	AL	• •	0/	D	er		9	V		1) F	25	•	· · ·	•	•	· ·	•	· · ·	• •	•	•
		•	• •			• •		• •					• •				• •					• •				• •		• •			• •		• •			•
•	•	•	• •					• •		• •			• •				• •	• •		• •		• •	• •			• •		• •		•	• •		• •	• •		•
•		•	• •				٠	• •		• •			• •				• •	• •	• •	• •		• •				• •		• •			• •		• •	• •	•	•
•	•	•	• •		•	• •		• •		• •			• •				• •			• •		• •	• •		•	• •		• •		•	• •		• •	• •		•
		•	• •		•	• •		• •		• •			• •				· · ·((V)		• •		• •	• •		•	• •		• •			• •		• •	• •		*
	•	•	• •		•	• •		•		• •	•		• •				À	\checkmark			•	• •	• •		•	• •		•		•	• •		• •	• •		*
	•	•	• •		•	• •				• •	•		• •			/	, .						• •		•			• •		•	• •		• •	• •		
															/					_																
														6	\mathcal{T}					7	I	Ύ.		<u> </u>	Ĵ.			1				Λ.		t		
														(5							l	/	_ Y I	0	214	M	. •	to	g	-0	. <	70	m	T		
																				7																
																<u> </u>			. /																	
																	Ľ	\sim	/																	
																	(-	W)															• •			
								• •		• •			• •				· · ·	\cdot	• •	• •		•						• •			• •					
			• •		•	• •	0	• •	•		•	•	• •		• • •				••••	• •	0	• •		•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•			0	
	•	•	• •	•	•	• •	•	• •	•	••••	•	•	• •	• •	· · ·	•	• •		••••	•••	•	• •	• •	•	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	•••	• •	•	•
0	•	•	• •	•	•	• •	•	· ·	•	• •	• •	•	· ·	• •	· · · ·	•	· · ·		• •	••••	•	· ·	• •	•	•	• •	•	· ·	•	•	· ·	•	• •	• •	•	•
•	•	•	• •	•	•	· · ·	•	· ·	•	· ·	• •	•	· · ·	• •	· · · ·	•	· · ·		· ·	· ·	•	· ·	· ·	•	•	· ·	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	• •	•	•
•	•	•	• •	•	•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·		•	· · ·		· · · ·	•	· · ·		· · ·	· · ·	•	· · ·	· · ·	• • • •	•	· · ·	•	· · ·	•	•	· · ·	•	· · ·	· · ·	•	•
•	•	•	· · ·	•	•		•	· · ·	• • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · ·	· · ·	· · ·				•	· · ·	· ·		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	•	•	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	•	
•	•	•		•	•		•	· · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·									· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•		• • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	· · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
•	•	•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · ·					•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
	•				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · ·					•			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
	•				· · · ·																				· · · ·								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																						· · · ·								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			

		• •	•	•							•	•				• •				_				•	• •	•						•				
								0	PC)İ	Ó	6	i C	Å	Ľ		n A	D	E	RI	Ň	6	1	vi	<u>.</u>	T)F	-C								
										-		٦.		7 4								1		•••				-								
																	./		<u>ا</u>																	
																		V																		
																. /	\mathcal{A}_{i}		\sum																	
															./	/ .																				
														/	/							9_			n p.	1.7		1								
													(S	Y								(+	.)	. •	-1	t	\geq	4								
													5	2								L	\cdot													
														- 2							7	1.														
																<u>,</u> .				/.																
																	K	\frown	/																	
																	· ()	W	j, i																	
																		Ľ																		
		• •					• •						• •																							
		• •					• •						• •																							
		• •					• •																		• •							•				
		• •		•			• •						• •																							
		• •					• •																		• •											
		• •			• •		• •		• •							• •						•			• •					• •	•		• •		• •	
•		• •		•	• •		• •						• •			• •			•			•			• •					• •			• •		• •	
		• •					• •																		• •											

•	•	•	•	• •	•	•	• •	•	•		Te	P	0 (0	G		A	L	•	0/	R	D	ER	11	16	Î	v	io	•	T)F	25	•	•	• •	•	•	•	· ·	•	•	• •	
	0										• •	0					• •			• •							•	• •														• •	
																				. ,				. b	AL	k.	tr	20	k		Ь	- A	f .										
																				•)																					
				• •			• •				• •						• •			1		人		• •				• •										•	• •			• •	
			•	• •			• •		•	•	• •		•			•	• •	•		/ 1		•)				•	• •		•	• •	•		•	•			•	• •			• •	
•		•	•	• •		•	• •			•	• •		•			•	• •	/	/.	• •				. / .			•				• •	1				•		•	• •			• •	
	•	•	•	• •		•	• •				• •		•				\preceq		•	• •				• •	4		· · ·	£	14		2	4						•	• •			• •	
		•	•	• •			• •		•		• •		•			(5	;)	•	•	• •				• •	((·	t)	· J.	U. 1	1	• •	1						•	• •			• •	
																	\sim	<u> </u>							Ń																		
																			>				. /	/ .																			
																				Ľ	\sim	/	/																				
																				. (Ŵ)																					
																					Ľ	/.																					
			•	• •			• •				• •		•				• •			• •				• •				• •								•		•	• •			• •	
•		•	•	• •			• •			•	• •		•			•	• •	•	•	• •				• •			•	• •			• •			•		•		•	• •			• •	
•		•	•	• •		•	• •			•	• •		•			•	• •	•	•	• •				• •			•	• •			• •					•		•	• •			• •	
				• •	•		• •		•	•	• •	•	•		•	•	• •			• •		•		• •		•	•	• •			• •	•							• •			• •	
							• •				• •	•	• •				• •							• •			•	• •											• •				
											• •																	• •															
		•					• •			•	• •		•			•	• •			• •				• •			•	• •			• •			•		٠			• •			• •	
		•	•	• •			• •		•	•	• •		•			•	• •	•		• •			•	• •			•	• •		•	• •	•		•	•	•		•	• •			• •	
				• •																																							

•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	T	DP	0	י פ י	G	C	A	L		D A		E	R		9	· ·	Vi	A.		D	F.	· 2	•	•	· · ·	•	•	•	· · ·	•	•	• •
•	• •	•	•	•	••••	•	•	••••	•	• •	0	• •	•	•	• •	•	•	• •		•	•	• •	•	•		•			•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •
•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	• •	•		•	•	• •	•		•		•	•	ີກ	0. l	ch.	 9 . 0	•	eli	`p.	-	to		זה	•	f			λ [•		•	• •
																			- (N.			V. V				el				. (1			U	m	V ۲				
•	•				• •			• •							• •			•	7	Ľ	人											J.		• •				• •	•		• •
	• •		•			•			•				•		• •			/	· .	•	•	. /		•		•					• •	•		• •			•	• •			• •
																	/						×	9			c P		1												
															Co	Y								(t		~	Ŧι	t	2	<u> </u>	F .										
															$(\mathcal{S}$	2								L	ノ	. '															
																							/	7																	
															• •							./.												• •							• •
	•				• •			• •							• •				$\left \mathcal{X} \right $	\frown	\langle										• •			• •				• •			• •
•	• •				• •	•		• •	•			• •	•		• •		•	•	- (W,)	• •	•	•							• •		•	• •		•	•	• •			• •
	•				•		•	•				• •			• •			•		\smile	•	• •		•							• •	•		• •			•	•		•	• •
•													•		• •					•	•	• •		•		•				•	• •	•		• •				• •			• •
															• •							• •												• •							• •
•	•				• •			• •				• •			• •		•	•				• •					•				• •			• •				• •			• •
•	• •				• •	•		• •	•			• •	•		• •		•	•		•	•	• •	•	•							• •		•	• •		•	•	• •			• •
•	• •				• •	•	•	• •	•			• •	•		• •	•	•	•		•	•	• •	•	•		•				•	• •	•		• •		•	•	• •		•	• •
															• •									•							• •							• •			

•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	• •		T	οP	0	0	9	C	Al	· · ·	0	R	D	er	41	16	Î	v	in.		D	F.		•	• •	••••	•	•	• •	•	· ·	•	•
																	• •					• •																• •		•
			• •					• •	•					•	• •		• •			• •		• •		•	• •		• •		•									• •		•
•			• •		•	• •		• •					•	•	• •	•	• •			• •		• •		•	• •		• •		•	• •	•	•		•	•	• •		• •		•
•		•	• •				٠	• •			•	•		•	• •		• •			• •		n r	•			• •		•							• •		• •		•
•			• •		•	• •		• •					•	•	• •	•	• •			· · ·	• <	- \	1	=	3		• •		•	• •	•	•		•	•	• •	•	• •		
		•	• •			• •		• •						•	•		•		-(-	آلا		. U.					• •		•	• •						• •		• •		
•			• •		•	• •		• •				• •		•	• •	•	• •	7	1		<u> </u>	• •			• •		• •			• •				•	•	• •		• •		
		•	• •											•	• •					• •	- ^	· · ·		•	• •		• •		•		•							• •		
					•	• •		• •			• •	• •	•	•	• •		/		•	• •		. /	6		• •		n i r	, '	÷.,	· ·				•	•	• •		• •		
														•		\checkmark	• •			• •		• •) (Î	· · ·	+	t	2	- 4		•			•		• •				
															(S))							(t)	J. 1		,												
																\sim							π																	
																	\geq				. /	/ .																		
																		\sim	1-	~ /	/_																			
																			7,	J)																				
																			2	シ																				
																				• •																		• •		
															• •		• •			• •		• •														• •		• •		
•			• •				٠	• •			• •	• •		•	• •		• •			• •		• •			• •		• •		•			•				• •		• •		•
			• •		•	• •		• •						•	• •		• •			• •		• •			• •		• •			• •		•			•	• •	•	• •		
•		•	• •				٠	• •			•	•		•	• •		• •			• •		• •		•	• •		• •		•			•				• •		• •	•	•
•			• •		•	• •		• •					•	•	• •	•	• •			• •		• •		•	• •		• •		•	• •	•	•		•	•	• •	•	• •		
•		•	• •	•		• •		• •					•	•	• •		•			• •		• •		•	• •		• •		•	• •	•							• •		•
•			• •		•	• •		• •				• •		•	• •	•	• •		•	• •		• •			• •		• •			• •				•	•	• •		• •		
			•			• •		• •							•		• •			• •		• •			•		• •			• •		•						• •		
			•		0	• •		• •							• •		• •			• •		• •			• •		• •			• •				•	0	• •		• •		

•	• •	•	•	•	· ·	•	•	• •		To	Po		G I	CA	L	0	RD	ER		9	vi vi	• • •	D	FS		· ·	• •	•	• •	· ·	• •	• •	•
								• •		• •		• •							• •						• •								
								• •		• •	• •	• •	• •				• •	• •	• •						• •	• •			• •	• •		• •	
•	•	•		•	• •		•	• •		• •	• •	• •	• •		• •		• •		nt.	i .		• •			• •	• •	• •		• •	• •		• •	•
	•	•	•	•	• •		•	• •		• •	• •	• •	• •		• •			· · · •	F V	=	= 3	• •			• •	• •	• •		• •	• •		• •	•
•	•	•	•	•			•	• •		• •	• •	• •	• •	• •	• •		(√) ' '			• •	• •			• •	• •			• •	• •		• •	•
							•									1		\mathbf{i}															
															/	<u> </u>																	
														~/	/ .					1		0.1	17	/									
													. ((S)						(+		ナじ	tj	2.4									
•										• •				Ľ						1	<mark>),</mark> a			'		• •			• •			• •	
	•							• •		• •	• •	• •	• •		\searrow				/	1					• •	• •			• •	• •		• •	•
				•	• •		•	• •		• •	• •	• •	• •			\mathbf{N}	• •	/		• •		• •			• •	• •	• •		• •	• •		• •	•
																· · ·																	
		•		•		٠	•	• •		• •		• •	• •		• •	K,		/ -	• •	• •		• •		• •	• •	•				• •		• •	
•	• •	•	•	•	• •	•	•	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •			W		• •	• •	· · ·	· ·			• •	· ·	• •			· ·		 	•
•	• •	•	•	•	•••	•	•	•••	•	· ·	· ·	· ·	· ·	· · ·	••••		W		· ·	•••	Ne	'xt	-	٦f	- 2-	Lo.	oÞ	C	ons	ide	ž.	-t	•
•	· ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·	•	· ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·		W		· ·	• •	Ne	2xt	- - - -	Df	- 2 -	lo	op i		ons	ìde	21	t	•
•	• •	•	•	•	· · ·	•	•	· · ·	•	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	· · ·			W		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·					• •				• •			• •	•
•	· · ·	· · · ·	· · ·	•	· · ·	•	•	· · ·	· · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · ·	X			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					• •				• •			• •	•
	· · ·	· · · ·	•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·	•			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					• •				• •			• •	• • • • • •
		· · · · ·	•	•		· · ·	• • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 . .<	 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				 . .<		but		it	٤أ	al				• •			• •	•
			•	•			•			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 . .<	 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				 . .<		but		it	٤أ	al				• •			• •	• • • • • • •
		• • • • • • •	• • • • • • • •			• • • • • • • • •				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 . .<	 							 . .<				it	٤أ	al				• •			• •	
		• • • • • • • • •								 . .<	 . .<	 . .<							 . .<		but		it	٤أ	al				• •			• •	
						• • • • • • • • • • •				 . .<	 	 							 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	but		it	٤أ	al				• •			• •	
							• • • • • • • • • • • • •			 . .<	 	 							 . .<	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	but		it	٤أ	al				• •			• •	
			• • • • • • • • • • • •				• • • • • • • • • • • • • •			 . .<		 							 . /ul>		but		it	٤أ	al				• •			• •	

• •	· •		TOPOLO GICAL	ORDERING	via DFS		
• •	•	· · · · · · · · · · · ·		fy]-	2	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
• •	•	· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · ·	· · · · · · · · · · ·
• •	•	Next, DPS	S-Loop	(t	f[t]=4	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · ·
• •	•	Considus s	2	L W	· · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·
• •	• •						
• •	•					· · · · · ·	
• •		· · · · · · · · · ·					· · · · · · · · · · ·
•		· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · ·	· · · · · ·	

•	•	•	· ·	•	· ·	•	• •	•		Te	P		י ס (91	Cł	tL	•	0/	L L)E	RI	N	9				D	F.	Š	•	· ·	•	- ·	•	•	· ·	•	• •
• • • •	•	•		•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•		•	١	5 0 0 0 0 0 0	2í 12	ې م ن	۲ ۲ ۱	plo F	re		•		V		f	[v]		: 3	· · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · ·	•	· · ·	•			•	· · ·	•	· · ·
•	•	•	· · ·	•	· · ·	•	· · ·	•	•	· · ·		•	•	• •	S			· · ·	•	•			t		f	[t] =	- (•	· ·	•	• •		•	· · ·	•	· ·
	•	•	· ·	•	• •	•	• •	•	•	• •			•	· ·		• •			W)		• •	•	•	• •		• •	•	· ·	•	• •	•	• •		•	· ·	•	
•	•	•	· ·	•	· ·	•	· · ·	•	•	· ·	•	•	•	· ·	•	· ·	•	· · ·	•	•	· · ·	· ·	•	•	· · ·	•	· · ·	•	· ·	•	· ·	•	•	•	•	· ·	•	• •
•	•	•	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •	•	•	•	• •	•	• •	•	· ·	•	•	· ·	• •	•	•	· ·	•	• •	•	• •	•	• •	•	•	•	•	· ·	•	· ·
•	•	•		•	· ·	•	• •	•	•	• •		•	•	• •	•	• •	•	• •	•	•	• •		•	•		•		•		•		•				• •	•	

•	•	•	· ·	• •	•	•	· ·	•	•	. 	To	P) L	0 0	G 1	C	AL	• •	0	R	D	er		16	Ĩ	v	in.	•	D	R	· 2	•	•	· · ·	•	•	•	· ·	•	•	· ·
																							• •								• •							• •			• •
										• •													• •			• •					• •										• •
			•	• •		•				• •		• •				٠	•				• •		• •			• •		•	• •		• •			• •				• •		•	
•		•	•	• •		•			•	• •		• •					•			•	• •	1		. i				•	• •		• •			• •				• •		•	• •
			•			•				• •		• •				٠	•					· <	- \	/]	=	3		•			• •		٠	• •						•	
		•	•	• •		•			•	• •		• •			• •		•			·('	V)		. U.	-		-		•	• •		• •			• •				• •		•	• •
			•	• •		•		•		• •		• •		•			•		7	1		~	• •		•	• •		•	• •		• •	•		• •						•	• •
•			•	• •		•			•	• •		• •			• •		•				• •					•		•	• •		• •		•	• •			•	• •		•	• •
	•	•	•	• •	•	•			•	• •		• •					1	/		•	• •		. /			• •		N., 1	 .		, . ,			• •				• •			• •
		•				•			•	• •						Ċ	$\langle \rangle$			•	• •		• •) (1	、 ・	+	t	1 =	$\geq l$	4			• •			•	• •			
				• •		•			•						· (S				•		•		(-	t,) .	J. 1	· · ·	J .									• •			
																\checkmark	\mathbf{i}	<u> </u>						π																	
																		\searrow					/																		
																					_ /	/_																			
																				(v	J)																				
									· .						с. њ.					V	У.																				
									W		2	. (In	ex.	DIC) N	وكم																								
															! .																										
																															• •										
															• •								• •			• •					• •			• •							• •
			•	• •						• •		• •					•			•	• •		• •			• •			• •		• •			• •				• •			• •
			•			•			•	• •		• •			• •		•				• •	•	• •		•	• •		•			• •			• •				• •		•	• •
•		•	•	• •		•			•	• •		• •					•			•	• •	•	• •			• •		•	• •		• •			• •				• •		•	• •
			•			•				• •		• •				٠	•				• •		• •		•	• •		•			• •			• •						•	
•	•	•	•	• •		•	• •		•	• •		•			•		•			•	• •		•			•		•	• •		•			• •			•	• •		•	• •
•	•		•	• •			• •			•		•			• •		•			•	• •		•			•		•	• •		•			• •				• •		•	• •
•	•	•	•				•		•	•		•			•					•	• •		•			•		•			•			• •			•	•		•	• •
			•	•			•			•		• •			•						•		•			•			•		•			• •				• •		1	
				• •			• •			• •		•			•								•			•			• •									• •			• •

•					• •		0		Te) P	O I	ี้ ถึ	Ċ					۰ آ	Ŕ	r T	F	R		G	7				T	1	- 20	, .	• •		0	•	• •		
	•	• •				•			. 1 .	, ,	V (0	ייו			•	V									•		۰ ۲		-				•				
•	•						•						•								• •					•	• •			•	• •				•	•		•	
•	•						•						•								• •				•	•	• •			•	• •				•	•		•	
	•	• •			• •				• •				•		•						• •	P	t.	1		5	• •			•	• •		• •		•				
	•	• •			• •				• •				•		•				1		````	ť	L۸	J	-	ک	• •			•	• •		• •		•				
	•	• •			• •				• •				•		•				- (٧.) '				•	•	• •			•	• •		• •		•				
	•	• •			• •				• •				•		•			- 7	1`	·	\sim				•	•	• •			•	• •		• •		•	•			
	•	• •		•	• •						•		•		•		/				• •	Ζ.			•	•	• •			•	• •						• •		
		• •							• •							1	/ .						1				· ·	p.	, n	•									
		• •							• •					1	Ż	<u> </u>								$\overset{\sim}{}$	i	Ň	+	- -	F.	2	4								
		• •							• •					(2	S)) .								(t,)	. J.	U.	- <u>-</u>	•	- t								
		• •							• •							\leq								7	-					•									
		• •							• •								\swarrow													•									
		• •							• •									<u> </u>	i		/									•									
		• •							• •									1	*											•									
•	•					•	•											•		N	r -				•		• •			•			• •	•	•	•		•	
•	•					•	•													-	• •				•		• •			•			• •	•	•	•		•	
•	•					•	•																		•		• •						• •	•	•	•		•	
•	•					•	•								($\mathcal{A}_{\mathbf{x}}$. ń		, T	, T	°,	01			ŗ		• •						• •	•	•	•		•	
•	•					•	•										w		ν	1	7	01	ς.	r	V		• •			•			• •	•	•	•		•	
•	•					•	•																		•		• •			•			• •	•	•	•		•	
		• •		•	• •			•	• •						•	• •				•	• •				•	•	• •			•	• •		• •		•				• •
•		• •						•	• •							• •					•																• •		
•		• •						•	• •							• •					•																• •		
•		• •						•	• •							• •					•																• •		
	•	• •			• •			•			•		•		•	•					•				•	•	• •			•	• •		• •		•	•	• •	•	• •
•	•	•		•	• •				•							•				•	•				•	•	•				• •		• •			•	•	•	• •
•	•	•		•	• •				•							•				•	•				•	•	•				• •		• •			•	•	•	• •
•		•			• •				•		•				•	•					•						• •				• •		•			•	•		
•	•	•			• •		•	•	• •		•				•	•				•	•				•	•	•			•	• •		•		•	•	•	•	• •
		•			• •			•	• •		•					• •					•						• •				• •		•				• •		• •

•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	· ·	•	T	o f) 0	L) 6		Ċ	łL	•	0	R	D	el	21	N	9		Vi I		1	DF	25	• • •	•	•	· · ·	•	•	•	•	· ·	•	•	
		•		• •					• •			• •						• •			•	• •		h								• •				• •		•	•	•	• •			
			•	•				•	• •			• •		•			•	• •				·	• د	۴I	٧	=	: 3	3.	• •		•	•			•	• •		•		•	• •			•
•			•	•				•	• •		•	• •					•	• •		•	(N	1)		J. C			-		• •		•	•			•	• •		•	•	•	• •			•
				•				•	• •			• •						• •		1	1		<u> </u>	•	• •				• •		•	•			•	• •					• •			
			•			•			• •								•	• •	/		•	• •		$\overline{}$	• •						•				•	• •		•	•	•	• •			
									• •					•				· /	/ .			• •		. \					 	. [.] .		· ,				• •				•	• •			
																\mathcal{C}	2	<u>.</u>							2	t	7	4	-[-	t	2	- 4	•											
																6	S)									J).	J																
																									Λ																			
																			<u>,</u>					/																				
																				K.	~		/ .																					
									• •									• •			(v	1)			· /	1	0 0	1.			plo		. 1			• •		•	•	•	• •			
	•			•					• •			• •						• •				/.			. 0	- UI	فيم	an 1			.p ((17:	a	•		• •		•	•	•	• •			•
•			•	•				•	• •		•	• •					•	• •		•	•	• •		•	• •			÷Ν	• •		•.	•			•	• •		•	•	•	• •			•
			•	•	•			•	• •			• •		•			•	• •			•	• •		•	• •				• •		•	•			•	• •					• •			
			•			•			• •								•	• •			•	• •		•	• •				• •		•				•	• •		•	•	•	• •			
									• •									• •			•															• •					• •			
		•	•						• •								•	• •			•	• •			• •				• •							• •					• •			
•	•	•		•		•		•	• •			• •		•				• •			•	• •			• •				• •			•				• •		•		•	• •			•
•	•	•	•	•		•			• •			• •		•			•	• •			•	• •		•	• •				• •		•	•			•	• •		•			• •			
												• •						• •											• •															

•	•	•	•	•	· ·	· ·	•	•	· ·		Т	0	Po	L) (C.A	L	•	0	R	D	er	-1 1	16	Î	V	i A	•	D	Ŗ	2	· ·	•	•	· ·	•	•	• •		•	•	•
•		•	•						• •	-					• •						• •									• •									• •				
					•				• •			•		•			• •										•			• •						• •			•			•	
			•	•	•		•		• •			•			• •		• •				• •			• •			•			• •			• •			• •			•			•	
				•	•		•	•	• •						• •		• •				• •		6	11.	ιİ.		·	•		• •		•	• •			• •			•			•	
			•		• •				• •								• •				\sim	<u>`</u>	f	- [\	J.	=	3			• •			• •			• •						•	1
			•	•					• •												(1	()								• •		•	• •			• •						•	
																				1	\sim	\sim																					ļ
																			/																								
																		/.							4	_		C	P. i	<u>.</u>		1											
																(3	-)) 	+	<u>}.</u> .	+	ιt		2,	4											
																6	ノ								_	5	. .	Ĭ.,				1											
																		$\overline{\ }$. /	\mathcal{I}_{i}																		
																							/																	•			
																				\mathcal{A}	\sim	\checkmark								• •													
					•				• •			•			• •		• •			· (W)					•			• •			• •			• •			•			•	
•			•	•	• •		•		• •			•		•	• •		• •	•			\sim			• •			•			• •			• •	•		• •			•			•	
•			•	•	•		•		• •			•			• •		• •		•	f	Th.	<u>ן</u>	<u> </u>) '			•	•		• •			• •		•	• •			•			•	
•	•			•	•				• •			•		•	• •		• •				l	J	<u> </u>	L .			•	•		• •		•	• •		•	• •			•			•	
			•	•	•		•		• •			•			• •		• •				• •			• •			•			• •			• •			• •			•			•	
			•		• •				• •								• •				• •			• •						• •			• •			• •						•	
				•					• •		•										• •									• •		•	• •						• •				

•	•	· ·	•	•	· ·	· · ·	• •		To	Pa		06	10	A		0	R	De	FRI	N	q	V	in	-	DF	25	•	· ·	•	· ·	•		•	· ·	•	•
						• •		•	• •			• •			• •		• •		• •		• •									• •	•	• •		• •	۰	
						• •		•	• •			• •							f	V] =	3		• •		• •		• •				• •		• •		
•	•		•		•••	• •	•	•	• •	• •	•	• •	• •	•	• •	•	()	()	•					• •	•	•••		• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	•
												• •				/	1																•			
	•					• •			• •			• •			/		• •			Υ.	• •	•				• •	•	• •	•			• •		• •		
•	•		•			• •	· · ·		• •				C	\checkmark		•	• •	•	• •	X	T).	f	t	2	4		• •	•	• •	•	• •	•	• •	•	•
					. Ľ	Ae	ktr	ack		to.	2		$(\mathcal{S}$	Z							t), ,	. . .													
•	•			•		• •		•	• •	• •		• •			<u> </u>	•	• •							• •		• •		• •	•		•	• •	•	• •	•	•
						• •												_ /	/																	•
																	(w	١) ١																		
	•								• •			• •										•		• •		• •	•	• •	•			• •		• •		
•				•	• •	• •			• •			• •			• •	f	Th	ງ]:	= 2		• •			• •		• •		• •	•	• •	•	• •		• •	•	
																	\mathcal{V}	J																		
																																		• •		
•	•				• •	• •			• •			• •			• •	٠	• •	•	• •		• •			• •		• •		• •		• •	٠	• •	•	• •	٠	•
												• •					• •	•	• •					• •	•			• •								•
						• •				• •		• •				٠	• •		• •		• •			• •		• •		• •		• •		• •		• •	٠	
	•			•	• •	• •			• •	• •		• •	• •		• •		• •		• •		• •			• •		• •		• •				• •		• •		•
				•																																

•	•	•	· ·	•	•	• •	•	• •	• •	T	o P) 0(10	G		A	L	· · ·) A	D	E	RI	N (Í	V		•	D	F	2 ¹ 2	•	• •	•	•	· ·	•	•		•	· ·
															• •							fſ	v]	=	.?															
			• •						• •		• •		• •		• •			• •	- (v) ·	1.0	, L		2			•				• •			• •		•	• •		
			• •	•		• •			• •		• •		• •		• •			• •	7	ن ر	<u> </u>		• •			• •		•			•	• •			• •		•	• •		• •
•	•	•	• •		•	• •			• •		• •	'n	 • ~					/	•	• •		Υ.	• •		•	• •		•			•	• •		•	• •					• •
•	•	•	• •	•	•	• •	•		• •		• •	Ŧ	S	=	1		/			• •				•			n .	· ·		2	•	• •		•	• •		•			• •
	•		• •		•	• •						- 1				\checkmark		• •					4	$\widehat{\Gamma}$	Ň	Ŧ	14		2	4	•	• •			•					• •
															(S									t)	. J .	<i>v</i> -			1										
																\sim	<u> </u>						Π	_																
																		<u> </u>				/																		
																			K	\sim	/.																			
																			' (I	W)																				
																				<u>ار</u>																				
			• •						• •		• •		• •		• •			• •	CГ	ำ	-	2	• •					•				• •			• •		•	• •		
			• •	•		• •			• •		• •		• •		• •				ΓL	w]		1	• •			• •		•			•	• •			• •		•	• •		• •
•			• •		•	• •							• •		• •		•	• •					• •								•	• •		•	• •		•		•	• •
•			• •		•	• •	•						• •		• •		•	• •					• •					•			•	• •		•				•	•	• •
	•		• •	•	•		•		• •				• •		• •	•	•	• •				•	• •					•			•	• •		•						• •
					•			•					• •																			• •								
																							• •															• •		

•	•	••••	•	•	•	•	 •	•	Т	0	Po	L) E	j (CF	łL	-	C) (E	R	11	16	Î	V	in	•	D	F.	2	•	•	· ·	•	•	•			•	•	•
									• •																																	
									• •	• •																• •					• •			• •								
•	•							•	• •	• •		• •	•					• •				• •				• •			• •	•	• •			• •				• •				
•	•	•		•		•			• •	• •						• •		• •					۲.	. ń				•	• •		• •			• •		•		• •	•		•	•
•	•	•		•		•			• •	• •		• •			•	• •	•	• •	•			· Ŧ	N		=	3		•	• •		• •			• •	•	•		• •		•		•
•	•					•	•	•	• •	• •		• •				• •	•	• •	- 1	Ý)	•	U.					•	• •	•	• •			• •	•		•	• •				•
•	•	•	•	•	•			•	• •	• •		• •		•		• •	•	· ·	1`	·	$\overline{\ }$			•		• •			• •		• •		•	• •		•		• •		•		
									• •		1	2 0	า ่	1							•	. /	、 ·			• •			• •		• •		•	• •						•		
									• •		+	-1,8	=	- 1		/								6			0	p., 1	n .													
														6	2	<u>.</u>								2	t	Ň.	+	lt	=	> L	F											
														6	S)									l	/	J.															
																\sim								\mathcal{A}_{i}																		
																		<u> </u>				. /.	<u> </u>																			
																			K	\frown	/																					
																			(W)																					
									• •	• •							•	• •		-									• •													
									• •	• •							•		СТ	11]=	2 1	۰ ۲			• •			• •		• •			• •				• •				
•	•					•		•	• •	• •		• •	•					- 1	51	W	J -	- 4	<u> </u>			• •			• •	•	• •			• •				• •				
•	•	•		•		•		•	• •	• •						• •		• •	- 1		-	• •		•		• •		•	• •		• •		•	• •		•		• •	•			•
•	•	•				•			• •	• •		• •			•	• •		• •			•	• •				• •		•	• •		• •			• •				• •				•
•	•	•				•		, T		• •	1	• •			•	• •						• •		· .		• •		•	• •	Ň	• •		1	• •				• •				•
						•		D	F٢	<u> </u>	LO	00		nu	Ň	Ċ.	Ċ	int	_	้อ	Ŧ.	· 1	50	vt	ìU	U.		≯	· · ·	20	ine	<u> </u>	1	• •			•	• •			•	
									• •			F		• • •							1	• •	-	-,				6	• •		• •		i	• •						•		

•	•	· ·	•	•	•	· ·	· ·	•	•		T	0	P	0	Ľ	0	G		C ,	A	Ļ	•	Ċ	, A ,	L' T)) (e f	י צו י	N	9	•	v	i •		1	DI	P.	2		•	•	•	•	•	•	•	•	• •	 •
•		21		ÌW		1	• •	D	PP	2		L)0	þ	•	, 0	a l	e Gr	99	u	ł	۱Ŋ	۰ ۸	0	91 9	r T	n. 1	2	•	i Ìr	Ì	· ·	() (n	ר ה ח	1	'n)	V	tì	m	و	•	•	•	•	· ·	 •
•				•																•					•		•														•			•			•		
																															•																		
					•						•							•										•		•	•					•		•				•				•	•		•
•	•					•						•	•	•	•	•	•	•							•			•	•	•	•	•	• •			•	•	•			•	•	•		•	•	•	• •	
•					•	• •								•		•		•			•					•	•	•	•		•	•	• •					•			•	•		•		•	•	• •	
																															•																		
																															•																		
						•						•	•		•															•	•	•					•	•							•	•	•	• •	•
•	•				•	•						•	•		•	•	•										•			•	•	•	• •				•	•					•	•	•	•	•	• •	
•	•					•						•	•	•	•	•	•	•							•			•	•	•	•	•	• •			•	•	•			•	•	•		•	•	•	• •	
	•					•						•	•		•													•	•		•	•	• •			•	•	•							•		•	• •	
					•																						•				•		• •		•	•		•			•		•	•		•	•	• •	
									•																			•					• •			•	•	•							•			• •	

TOPOL	OGICAL ORDERING VI	V DFS
Claim 1: DFS-Loop	algorithm nuns in (D(m+n) time
Claim 2: Under DF	-s-Loop,	
	EE then f[u]	< f[v]

· · · · ·	· · · ·	· ·	••••	· · ·	To	Po	LO	G 1	ĊA	L	0	RT	E	RI	n e	î	Vi	A	D	F.		••••	•	· ·	•	· ·	•	• •	
Cl	lim Aim	1:	T) 	tìr	ne	•	· ·	•	• •	· ·
Cl			• •		• •	• •	• •	. >	• •	• •		• •	· · ·	•	· ·		· ·	· · ·	· · ·	•	· ·	· · ·	•	· ·	•	· ·	•	· ·	· ·
· · · · ·	· · ·	•••		ĺf										•	f	[u	[]	4	f	Γv]	•••	•	•••	•	· ·	•	· ·	
Proof	2k	etch		T	f i	U a	vis	ite	d	6	2 fo	re	N N		. <u></u>	7	• •	• •	• •	-	• •	• •	•	• •			•		
· · · · ·		• •			• •	• •	• •	• •			•	• •	• •	•	· ·		 	• •	• •	•	• •	• •	•	• •	•	· ·	•	• •	
· · · · ·	· · ·	· ·	· · ·	· ·	· ·	· · ·	· · ·	· · ·	· · ·	· ·	•	· ·	· ·	•	· ·		· ·	· ·	· · ·	•	· ·	· ·	•	· ·	•	· ·	•	· ·	· · ·
· · · · ·		• •	• •	• •	• •	• •	• •	· ·	• •	• •	•	• •	• •	•	• •	• •	• •	• •	• •	•	• •	• •	•	• •	•	• •	•	• •	• •
· · · · ·	· · · ·			• •	• •	· · ·	• •		• •		•	• •	· ·	•	•••	•	• •	• •	• •	•	• •		•	· ·	•	· ·	•	· ·	• •

· · · · · · · · · · · ·	TOPOLOGICAL ORDERI	NG VIN DFS
Claim 1:	DPS-Loop algorithm nuns	in $O(m+n)$ time
Claim 2 :	Under DFS-Loop,	
· · · · · · · · · · · ·	if $(u, v) \in E$ then	f[u] < f[v]
Proof sketch	If a visited before v	\Rightarrow hecursive call for v finishes before that of u
· · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	tinishes before that of u
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

	TOPOLOGICAL ORDERING VIA DES
Claim 1:	DFS-Loop algorithm runs in $O(m+n)$ time.
Claim 2 :	Under DFS-Loop,
· · · · · · · · · · · ·	if $(u, v) \in E$ then $f[u] < f[v]$.
Proof skitch	If u visited before $v \implies$ necursive call for v finishes before that of u
· · · · · · · · · · · ·	\Rightarrow u's label $<$ v's label
· · · · · · · · · · ·	

· · · · · · · · · · · ·	TOPOLOGICAL ORDERING VIA DES
Claim 1:	DFS-Loop algorithm muns in $O(m+n)$ time.
	Under DFS-Loop,
	if $(u, v) \in E$ then $f[u] < f[v]$.
Proof skitch	If u visited before $v \Rightarrow$ necursive call for v finishes before that of u
	\Rightarrow u's label < v's label
· · · · · · · · · · · ·	If V visited before u =>
· · · · · · · · · · · · ·	

TOPOLOGICAL ORDERING VIA DES
Claim 1: DFS-Loop algorithm runs in $O(m+n)$ time
Claim 2: Under DFS-Loop,
if $(u, v) \in E$ then $f[u] < f[v]$.
Proof sketch: If u visited before $v \Rightarrow$ necursive call for v finishes before that of u
\Rightarrow u's label $<$ v's label
If V visited before u => no v -> u path (no cycle!)

TOPOLOGICAL ORDERING VIA DES
Claim 1: DFS-Loop algorithm runs in $O(m+n)$ time.
Claim 2: Under DFS-Loop,
if $(u, v) \in E$ then $f[u] < f[v]$.
Proof skitch: If u visited before $v \Rightarrow$ necursive call for v finishes before that of u \Rightarrow u's label < v's label
If V visited before $u \implies no v \implies u$ path (no cycle!) $\implies DFS(v)$ won't discover u

	TOPOLOGICA	L ORDERI	NG VIA DE	2	
Claim 1:	DPS-Loop algori	thm nuns	in $O(m +$	n) time	· · · ·
Claim 2 :	Under DFS-Loo	þ,			
	$if(u,v) \in E$		f[u] < f[u]		
Proof Sketch	If U visited	before v	⇒ hecursive finishus be	e call for v efore that of u	· · · ·
· · · · · · · · · · · ·				< v's label	• • •
· ·	If V visited l	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	≥ no v ~~?u ≥ Dfs(v) Won't	path (no cycle!" discover u	
			⇒ v's neousive	call finishes before	u's.

•	· · ·		•	•	•	· · ·	•	•	•	-	Te	DP P	• • •	L	0	G		A	۲L	•) (L T	> €	ER	11		Í		7 i e		T)F	25	•	•	•	· · ·	•	•	•	•	•	· · ·	•	•
•	- F	V	0 1	r e		· · ·	•	Ð	F-	- 2	- [0.0	P	•	al	90) ji	it	hr	~	-+	_ల	h n	nī	no	rt.	<u>U</u>	•	01	• •	011	ny	· · ·	ìn	٩ ٩	rt	•	g	ro	لم ام	h	•	•			
•	• •		•	•	• •	· ·	•	() v	d	· · · ·	g	L-	tn	λn	١٤	•	S	7 Y	ne) N	la	bQ	eli '	ing		f	· ·	•	• •	•	•	• •	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	• •	• •	•	•
•	• •		•	•	•	· ·	•	•	•	0 0 0	• •	•	•	•	0	•	•	• •		•	•	0	•	0	•	• •		0	•	• •	•	•	•	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	• •	•	•
•	• •		•	•	•	· ·	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	• •	• •	· ·	•	•	•	•	•	•	· ·		•	•	••••	•	•	• •	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	· ·	•	•
•	• •		•	•	•	· ·	•	•	•	•	• •	•	•	•	•	•	•	• •	· ·	•	•	•	•	•	•	• •		•	•	• •	•	•	• •	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	· ·	•	•
•	• •		•	•	• •	· ·	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	• •	• •	· ·	•	•	•	•	•	•	· ·		•	•	· ·	•	•	• •	•	•	•	•	· ·	•	•	•	•	•	· ·	•	•

· ·	TOPOLOGICAL ORDERING VIA DES
Νοτε :	DFS-Loop algorithm terminates on any input graph
	and returns some labeling f. not necessarily
· · · · · · · · · · · ·	not topological ordering a DAG
· · · · · · · · · · ·	

. .	.	APPLICATIONS	0F DFS	<th> </th>	
	Topological Strongly Cor	ordering inected Compone	mts		<th> .</th>	 .
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				· · · · · ·	· · · · · ·	
· · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · · ·		

· · · · · · · · <	APPLICATIONS	27¢ 70	· · · · · ·	· · · · · · ·	 	· · · · · ·
· · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·
· · · · · · ·	To pologi co	l ordering			· · · · · ·		· · · · · ·
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					
· · · · · · ·	Strongly (onnected Compone	mts	· · · · ·	· · · · · · ·	· · · · · ·	· · · · · ·
	Strongly (onnected Compone	et m	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	Strongly (onnected Compone	et m	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
	Strong ly (onnected Compone	et m et e e e e e e e e e e e e e e e e e e	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

							• •									*	*	• •															• •			1		1			• •
								_					.		 																										
								S		R	0 t	1 <i>E</i>	a .		1	'n	N	N	F.	CI	r (-1		. (ົດ	M	I D		I E	3	π	١.									
								0			•••		7 9				-		V			/ 3			Co		T	9 1			4										
•							• •	•		•	• •			•	•		•	• •						•			•	•	• •			•	• •								• •
				•	•	•	• •				• •					•	•	• •						•				•	• •			•				•	•				• •
		•		•	•	•	• •		•	•	• •					•	•	• •				•	•	•				•	• •		•	•				•	•		•	•	• •
							• •				• •						•						•	•									• •			•			•		• •
																																				•					
•	•			•	•		• •		•	•	• •					•	•	• •				•		•				•	• •		•	•	• •							•	• •
							• •				• •							• •						•												•					• •
-				•			• •				• •					•		• •				•	•	•				•				•	• •			•	•			•	• •
					•												•						•	•				•				•	• •			•				•	• •
					•						• •												•	•									• •			•			•		• •
																																				•					• •
•	•			•	•		• •		•	•	• •					•	•	• •				•		•				•	• •		•	•	• •							•	
							• •				• •							• •						•												•					• •
-				•			• •				• •					•		• •				•	•	•				•				•	• •			•	•			•	• •
•			•		•		• •			•	• •												•	•				•				•			•	•			•	•	• •
•					•	•	• •			•	• •						•	• •					•	•				•	• •			•	• •			•	•				• •
							• •				• •													•									• •			•	•				

• •	STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	•
• •				
				•
		and a start of the start		
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Y	t	
	3	~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~		
• •		W		
• •				
• •				
• •	Connected?		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•
· ·	Connected?			•
· · ·	Connected?			
	Connected?			-
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	Connected?			
	Connected?			
	Connected?			
	Connected?			

Connected? Yes if one looks at the undulying undirected graph No if one cares about neachability via directed edges		STRONGLY	CONNECTED C	OMPONENTS	
Connected? Yes if one looks at the undulying undirected graph	· · · · · · · · · · · · · ·			· ·	· ·
Connected? Yes if one looks at the undulying undirected graph		Sector Contraction of the sector of the sect	t		
Yes if one looks at the underlying undirected graph					
No if one cares about heachability via directed edges	· · · · · · · · · · · ·		4.0 10.4.1.5	un die o t	
	No if	one care abou	t heachability	via directed e	y Inph 2dges

Connected? Yes if one looks at the undulying undirected graph No if one care about neachability via directed edges	· · · · · · · · · · · ·	STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	· · · · · · · ·	· · · · ·
Connected? Yes if one looks at the undulying undirected graph						· · · · · ·
Connected? Yes if one looks at the underlying undirected graph	· · · · · · · · · · · · · · ·			t	· · · · · · · · ·	
Yes if one looks at the underlying undirected graph	Connected	2	W	· ·		· · · · · ·
No if one cares about neachability via directed edges	· · · · · · · · · · · ·		the underlyin	g undirected	graph	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	No if	one cares abo	nt <u>heachability</u>	Via directed	2dges	· · · · · ·

• •			•	• •	•	• •	STR	ONGL	Y CONI	NECTE	D Co	MPON	ENT	<u>ר</u>						
• •	• •	• •	•	• •	•	• •									• •	• •	• • •		0 0	
						• •									• •					
• •						• •				A COLOR							• • •			
• •			•	• •	•	• •						· · · ·		• •	• •	• •	• • •			
• •	• •		•	••••	•	•••			(S)		(t)	· · · ·		• •	• •	• •	• • •			
• •			•	• •	•						7					• •				
			•		•					X										
• •					•					W					• •					
				• •		• •											• • •			
• •				•					stron	N N N N N		• • • •	• • •		v .					
· ·	· · · (Cav		be	•	nec	rched	from	n every	other	verte	x by	Q	di	hec	ted	Þ	ath	· · ·	

· ·	· · ·		• •	•	•	· ·	S	TR	ONE	ily	Co)N	NE	CTE	ED.	Co	MF	by	ENT			• •		• • •		· · ·
· ·	· · ·	· ·	• •	•	•	• •	• •	· · ·		· ·	· · · ·	· ·			· · ·	• •	• •	· ·	 	lot	0+	1000J		Com	o e ct	
· ·	· · ·	•	• •	•	•	• •	• •								7	(t)			 	400	-3 (0.0	J		ŋcu	ted
	· · · ·	· · ·		•	• •	· ·	· ·		· · · ·				×~					· ·	• •	· · · ·	· • ·			· · ·	· • ·	· · · ·
· ·	· · ·	· ·		•	•	· ·	· ·		· · · ·	· ·	· · · ·	· ·	W		· · ·	• •	· ·	· ·	· ·	· · ·	· • ·	• •		· · ·	· • ·	· · · ·
· ·	A	,	d	Ĵ٦	ور	ted	• •	graf	h i	21 21	st	10N 50 5 5	gly	· ·	Conr	rect	ed		<u>1</u> .	evi	ry T	Ve	rte	X	· • ·	· · · ·
· · ·											er		N N						•		. .				h.	· · · ·
	· · ·		• •	•	• •		• •		· · ·	· ·	· · · ·		• •	· ·	· · ·		• •		• •	· · ·	· • ·	• •	• •	· · ·	· • ·	· · ·
• •	• • •			•			• •		• • •	• •		• •	• •	• •		• •	• •	• •	• •	• • •		• •	•			

STRONGLY CONNECTED COMPONENTS √) . . _ Strongly connected (t)(5) (W)A directed graph is strongly connected if every vertex can be neached from every other vertex by a directed path.

•	• •	•	•	• •	•		•	•		S.	T	R	Dŀ	16	á 1	LY				N		Į (E(τ	E	D) .	('0	M	Pe	N N	E	N N	U		• •		•		•	•	•	• •		•
•		 A	•	2	tr	0Y	g		•	С	Q Q Y	١M	و	eŧ	حا		•	ۍ م)))	^ţ)0)0	n N	er	it	· -	, , ,	f		0	Ľ	d	ir	Ł	t	ed	· · · · · ·	0	fra	×þ	h	•	9	•			•
•																																														•
		 •		• •	•							• •							•	0		0	•			•																				
	•			• •			٠			•	•	• •				٠									•		• •		۰		• •		۰		٠			•	•	•	•	•	•	•	•	
																																				•										
•	•			• •						•	•															•	• •				• •	•				•	•					•	•	•	•	
•	•	•		• •						•		• •			•		•	•								•	• •		•		• •	•		•		•	•	•	•			•	•	•	•	•
•	•	•		• •						•	•	• •			•	•	•	•			•		•			•	• •	•			• •	•		•		•	•	•				•	•	•		
•	•	•		• •		•				•	•	• •						•			•					•	• •			•	• •	•		•		•	•	•				•	•	•		
•	•					•					•	• •							•								• •			•	• •					•										
				• •													•						•											•												

STRONGLY CONNECTED COMPONENTS A strongly connected component of a directed graph G is a maximal subgraph of G that is strongly connected.

STRONGLY CONNECTED COMPONENTS A strongly connected component of a directed graph G is a maximal subgraph of G that is strongly connected.

STRONGLY CONNECTED COMPONENTS A strongly connected component of a directed graph G is a maximal subgraph of G that is strongly connected.

STRONGLY CONNECTED COMPONENTS A strongly connected component of a directed graph G is a maximal subgraph of G that is strongly connected.

STRONGLY CONNECTED COMPONENTS Theorem: Given a directed graph G, define a "meta" graph H=(X,F) that has a vertex for every SCC of G, and an edge (1,y) EF if there is an edge from some vertex in SCC corresponding to a to some vertex in SCC corresponding to y Then, H is a DAG

STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	via DF	S

STRONGLY CONNECTED COMPONENTS VIA DES

· · · · · · · ·	STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	Via	JFS	
					• • • •	
		,				
)	a a a a a a a a a a a a			
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	$\mathbf{\lambda}$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
			1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	\mathbf{i}	• • • • •	
		-		·\. · ·	• • • • •	
		K		1		
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
)			
				• • • •		
• • • • • •				• • • •	• • • • •	
				• • • •		
				• • • •		

· · · · · · · ·	STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	via	DFS	
				• • • •		
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
			n n n n n n n n n			
)	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	\mathbf{i}	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	<u> </u>		
				$\left\{ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \right\}$		
				·\		
				· N_ · · ·		
				- () +		
				7		
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · ·		
				• • • •		

 STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	Via	DFS	
 				• • • • •	
 		, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,			
 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	1				
 / .		e e e e e e e Xe e e e 🖌	\mathcal{O} \mathcal{O}		
		<u>.</u>	Terra de		
 					
 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
 			• • • •		
 				• • • • •	
 				• • • • •	

 STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	Via	DFS	
 		<u>_</u>			
 			• • • •		
 			• • • •	• • • • •	
	$\mathbf{\hat{b}}$		· · · ·		
		1			· · · · · · · · ·
			\mathbf{Y} and \mathbf{Y}	an Sc	\mathcal{L}
 ()←	-0.				•
 			7 -		
 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	<u>.</u>			
 	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
)	• • • •		
 				• • • • • •	

· · · · · · ·	STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	via	JFS	
		· · · · · · · · · · · ·		· · · ·	· · · · · ·	
					· · · · ·	
			· · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · ·	
		7			· · · · ·	
					· · · · ·	
	1				· · · · ·	
	Ó c				· · · · ·	
			TOK	-0 7 0	· · · · ·	
					· · · · ·	
•••••					• • • • •	
					••••	
	Maybe do a I)FS from eve	ry node to i	dentify	all	SCC s ?

STRON	GLY CONNECTE	ED COMPONENT	[] via	DFS	· · · · · · · · · ·
		$\mathbf{A}^{\mathbb{O}}$			
			<i>ک</i>		
	/				
			// / / / / / /		
		70			
		X			
				• • • •	
		J K			
		★ (○) + + + + + + + + +			
🤪 Maybe do	a DFS from	every node to	identify	all	SCC 2 ?

STRONG	ALY CONNECTE	D COMPONEN	IC VIA	JFS	
		· · · · · · · · · · · · ·			
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		70	· · · · · · · ·		
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			\rightarrow	Union of	
			A.	union of	
		× ·			
· · · · · · · · · · · · · · · · · ·		A A	· · · · · · · · ·	· · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · ·		· · · · · · · ·
🤪 Maybe do	a DFS from e	every node to	identify	all So	5 2 S 2
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · ·		

	STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	VIA	JFS		
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·	• •
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·	•••
		7		· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·	• •
			A A A A A A A A A A A A A A A A A A A		· · · · · ·		
		$-\circ$	× ×				
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			7 · · · · ·	 	· · · · · · · ·	
				· · · · ·	· · · · · ·	· · · · · · · ·	•••
	(i) Malada a T				· · · · · · ·	0	· ·
(i) Maybe do a DFS from every node to identify all SCCs?	Traybe as a I	its from eve	y node to it	lenti fy		SCC ₂ (• •

· · · · · · · ·	STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	VIA	JFS
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · ·	No information
· · · · · · · · ·					at all
· · · · · · · ·					
· · · · · · · ·			× ×		
· · · · · · · ·					
				· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·
				· · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	haybe do a I)FS from eve	ry node to ic	dentify	all SCCs?
· · · · · · · ·					

 STRONGLY	CONNECTED	COMPONENTS	via	JFS			
 		· · · · · · · · · · · · ·					
 					• • •		
 					• • •	• • •	• • •
 		n n n n n n n n n n n			• • •	• • •	• • •
)		• • • •	• • • • •		• • •	
 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	\	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			• • •	• • •	• • •
 		a construction of the second sec	$\sqrt{1}$		• • •		• • •
			·\ · · ·		• • •		• • •
 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· ↓		• • •	• • •	• • •
 			— () 1		• • •	• • •	
 			7		• • •		
 				• • • • •			
 					• • •		
 	•						
 	Starting 10	· 4 . 11 . 1					
 	sconting bo	int matters!					

								• •																	•		• •				
											0		•	٠À	-	-	÷.		0-	T											
										FI	K			h	.] .		E	M	ľ	L									• •		
																. .															
			• •									• •						• •									• •	•	• •	 • •	
			• •		• •			• •							• •			• •									• •	•	• •	• •	
	• •						•					• •			• •	•		• •									• •	•	• •	• •	
	• •		• •		• •			• •							• •			• •			•					•	• •	•	• •	• •	
	• •						•					• •			• •	•		• •									• •	•	• •	• •	
	• •		• •		• •			• •							• •			• •			•					•	• •	•	• •	• •	
	• •		• •		• •			• •							• •			• •			•					•	• •	•	• •	• •	
	• •		• •		• •		•	• •		• •		• •			• •			• •			•		• •		• •		• •		• •	• •	
	• •		• •		• •		•	• •		• •		• •			• •			• •			•		• •		• •		• •		• •	• •	
	• •		• •		• •		•	• •		• •		• •			• •			• •			•		• •		• •		• •		• •	• •	
	• •		• •		• •		•	• •		• •		• •			• •			• •			•	•	• •	•	• •		• •		• •	• •	
	• •		• •		• •		•	• •		• •		• •			• •			• •			•	•	• •	•	• •		• •		• •	• •	
	• •		• •		• •			• •		• •		• •			• •			• •						•	• •	•	• •	•	• •	• •	
	• •		• •		• •			• •		• •		• •			• •			• •						•	• •	•	• •	•	• •	• •	
	• •		• •		• •			• •		• •		• •			• •			• •						•	• •	•	• •	•	• •	• •	
	• •		• •		• •		•	• •		• •		• •			• •			• •			•		• •		• •		• •		• •	• •	
	• •		• •		• •		•	• •		• •		• •			• •			• •			•		• •		• •		• •		• •	• •	
	• •		• •		• •			• •		• •		• •			•			• •							• •		• •	•	• •	• •	
	• •		• •		• •										• •														• •	• •	
	• •		• •		• •										• •														• •	• •	

FIRST ATTEMPT Recall : Starting here worked!

FIRST ATTEMPT Recall : Starting here worked ! : Start DFS at the "last" vertex (as per topological ordering algo)

FIRST ATTEMPT Recall : Starting here worked it lies in may sink" Scc? : Start DFS at the "last" vertex (as per topological ordering algo)

FIRST ATTEMPT Recall : Starting here worked! generates some ordering even for cyclic graphs E Start DFS at the "last" vertex (as per topological ordering algo)

FIRST ATTEMPT Let's run topological ordering (via DFS) and see what happens.

																			• •																			
															D	0			٨	· T =		A' D	T															
										• •					LI	K			AT	. [• [= [`	11	L.															
•					• •	• •				• •			• •		• •		• •		• •	• •	• •				• •			• •						• •		• •		
•	•	• •			• •	• •			•	• •			•		• •		• •			• •	• •				• •		•	•		• •			•	• •		•		
•					• •	• •			•	• •			• •		• •		• •		• •	• •	• •				• •					• •	•			• •		• •		
•	•				• •				•	• •	•	•	• •		• •		• •		• •	• •	• •				• •	•	•	• •		• •			•	• •		• •		
•					• •	• •			•	• •		•	• •	٠	• •	•	• •		• •	• •	• •				• •					• •				• •		• •		
•	•		•		• •	• •	•		•	• •	•		• •		• •		• •		• •	• •	• •				•	•	•	• •		• •			•	• •		•	•	
•					• •	• •			•	• •		•	• •		• •	•	• •				• •				• •	•	•		•	• •				• •		• •		
•	•	• •			• •	• •			•	• •			• •		• •	•	· · ·	\nearrow	$7 \bigcirc .$	$\langle - \rangle$			•		• •	•		• •		• •			•	• •		• •		
•	•	• •	•		• •	• •	•		•	• •	•		• •				- ·		• •			\sim	•		• •		•	• •		• •			•	• •		•	•	
•									•	• •					-				• •	\	\sim		<u> </u>		• •	•	•			• •				• •		• •		
	•	• •			• •				•	• •		\bigcirc	• •		• •	•	•		• •					1	۰ ۲		•	• •		• •			•	• •		• •		
	•					• •			•	• •	-7	1 . 1	Ń.		• •				• •			$\sum_{i=1}^{n}$)	•	• •					•	• •				
													Ì												71	Ń								• •				
					S-	tar	t	-	-7	> (J)č		-() [• •				Ν.			N.												
•							- v									~							E.	\sim		<u> </u>)											
•	•	· ·	•	•				•		• •	•	•							• •	· ·	· · ·		7	\sim		▼ - () #)		•			•	•	• •	•			•
•	•	· ·	•	•				•		· ·	•	•							¥		· · ·		Z	Ć				• •		· ·		•	•			• •	•	•
•	•	· ·	•	•	· ·			•		· · ·	•	•) /	/			 	•	· ·		•	•	· ·	•	• •	•	•
•	•	· · ·	•	•				•		· · ·	•	•									· · · · ·) /				 	•	· · ·		•	•	· · ·	•	· · ·	•	•
•	•	· · ·	•	•	· · ·			•		· · ·	•	•) /	>	7				· · ·		•	•	· · ·	•	· · ·	•	•
•	•	· · ·	•	•	· · ·			•	•	· · ·	•	•	· · ·) /		7		· · ·	•	· · ·		· · ·	• • • • •	· · ·	•	· · ·	•	• • • •
• • • • •	•			•				•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·)))				○ €		7			•	· · ·		•	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•			• • • • •
• • • • • • •	•			•	· · ·			•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·																7						•	• • • • • •	· · ·	•			
				· · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·											○ €		7						· · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•			
																										7								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- - - - - - - -			
													· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·													7								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · ·			• • • • • • •
													· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·													7								· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · ·		
													· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·													-						• • • • • • • • • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
																										- 7						• • • • • • • • • • • • •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
																																• • • • • • • • • • • • •			• • • • • • • • • • •			

			•				•							•											•							•	
													<u>م</u>			λ.		-		• •	-												
												FI	KJ			Π.	1.	E	ľ	١r													
																		•		•													
															>	7	\sum																
														_		/ _																	
																		Ń		\sim													
	•	• •												• •					、 ·		-			0	• •				• •				
								· .						• •					X				5	0	• •				• •				
		• •					· /	1	I V					• •	•	• •				$\sum_{i=1}^{n}$	•		(\bigcirc	• •	•			• •				
			• •	• •						1				• •	•		•	• •			``		1	Ĩ	• •							• •	
•		• •						<u>)</u>		-)			• •							\mathbf{X}		/	· `\	• •		• •		• •				
•		• •	• •	• •					•	\bigcirc	~	-	_	• •	•	• •		• •				7		.1					• •		• •	• •	
		• •	• •	• •		•	• •		•		• `	Š, Š		· _ ·		• •		• •			-7	\bigcirc	<u> </u>		\bigcirc		• •				• •	• •	
			• •	• •			• •		•			. <u>/</u> .			<u> </u>	s '		· · ·	_				· · ·	7	• •				• •		• •	• •	
		• •	• •		•	•	• •	•					$\sum_{i=1}^{n}$	• •		>	$)^{-}$	• •							• •		•		• •		• •		
	•		• •	• •		•	•		•			•	- ^	• •		/ ì	17				/		• •		• •						• •	• •	
•		• •	• •	• •		•	• •		•		•	• •		N.	Ľ	• 4		ر ۲					• •		• •		• •		• •		• •	• •	
	•	• •	• •	• •	•	•	• •	•				• •	•	. (•		\bigcirc					• •		• •		• •		• •	•	• •	•	•
•		• •	• •	• •		•	• •					• •	•	• •	- \	S I	./	. .		• •			• •		• •		•	•	• •		• •	•	•
		• •	• •	• •		•	• •		•			• •		• •	. •	_ لا	E	• •		•	•		• •		• •		•	•	• •		• •	• •	
•		• •	• •	• •		•	• •	•	•			• •		• •		. \		• •					• •		• •		• •		• •		• •	• •	
•	•		• •	• •		•	• •					• •		• •		• •		• •		• •			• •		• •		•				• •	• •	
		• •	• •			•	• •		•			• •		• •		• •		• •		•			• •		• •		• •		• •		• •	• •	
			• •				• •					• •		• •		• •		• •					• •		• •		• •		• •			• •	
		• •	• •	• •			• •					• •		• •		• •		• •					• •		• •		• •		• •			• •	
		• •	• •	• •			• •					• •		• •				• •					• •		• •		• •		• •		• •	• •	
							• •							• •											• •								

			•																				•		•					1.1	÷ •			
													•	^ -		λ-				0-1														
												F	IR	[]]		A' I	T.	E	M	K I														
																	- u		•	•														
							• •									• •					• •	•			• •								• •	
			• •	• •	•				• •					• •		• •	•		• •		• •	•	• •		• •		• •						• •	
			• •	• •			• •		• •					• •		• •			• •		• •		• •		• •		• •							
	• •	•	• •	• •		•	• •	•	• •					• •		• •		• •	• •		• •		• •		• •		• •		 •	•	•	•	• •	
•		•	• •	• •		•	• •	•	• •					• •		• •	•	• •	• •		• •		• •		• •	•	• •		 •	•	•	•	• •	•
•	• •		• •	• •			• •	•	• •				• •	• •					• •		• •		• •		• •		• •					•	• •	•
	• •		• •	• •			• •		• •						\sim	7	\sim	<u> </u>	• •		• •		• •		• •		• •					•	• •	•
			• •										<u> </u>						· ·		• •		• •											
												/	-																					
									•	2								\				<												
									1	K.									\sim			\geq												
									/'	$ \lambda $										1			\bigcirc											
											3											. /	<u> </u>											
)←	7	3	~									1			<u>N</u>										
												$\sqrt{1}$	-							. •) هر	کر			L .									
														\sim							7	\sim		, (
																~ 6	/						\nearrow											
)				/													
														Š.	1/	×λ	Ň,			/														
	• •	•	• •				• •		• •			•		J.	K	· 1	1	-			• •	•	• •		• •	•	• •	•					• •	
			• •	• •	•				• •					. ()	1	•	\mathcal{O}	• •		• •	•	• •		• •		• •						• •	
			• •	• •			• •		• •					• •	. /	<u>i</u> 1	1		• •		• •	•	• •		• •		• •							
			• •	• •	•		• •	•	• •					• •	. •	°)		• •		• •	•	• •		• •		• •			•		•	• •	
•			• •	• •					• •					• •			•	• •	• •		• •		•		• •		• •				•		• •	
•		•	• •	• •		•	• •	•	• •					• •		• •	•	• •	• •		• •		• •		• •	•	• •		 •	•	•	•	• •	•
•	• •		• •	• •			• •	•	• •				• •	• •		• •			• •		• •		• •		• •		• •					•	• •	•
	• •		• •	• •			• •		• •					• •		• •			• •		• •		• •		• •		• •					•	• •	•
			• •	• •					• •					• •		• •			• •		• •		• •		• •		• •						• •	
			• •																• •				• •											

	•																		•			•			•								• •
													•	•	•	· A .	~			A (. .											
												FI	K	7.1		A		1 E	: P	11													
													-					• -															
																									• •								
							• •			• •	•			• •									•		• •	• •		• •		• •			• •
	• •	• •	•				• •			• •		• •	•	• •			• •	•				• •			• •	• •		• •		• •			• •
	• •	• •	•				• •			• •	•	• •		• •			• •	•	• •			• •			• •	• •		• •		• •		•	• •
	• •	• •		•			• •			• •		• •		• •		• (n n		• •			• •			• •	• •		• •		• •			• •
	• •	• •		•	•		• •			• •		• •		• •	~	7	\mathcal{I}	-				• •			• •	• •				• •		•	• •
		• •					• •									' .		\sim				• •			• •					• •			• •
																		- 2			~												
									2										. \ .				<u> </u>										
								.1	\mathbb{R}											<u>\</u> .				4	、 ·								
								/	۱. ۱	ι.) .								
							. 6	ζ.		V											\mathbf{X}			71	Λ.								
								.)<		-3)										. `	<u>\.</u>	_/		. Ar								
													-									-Z		,	V								
																						7		•									
	• •	• •	•		• •		• •					\sim				ż						• •		/	7	• •		• •		• •		•	
	• •	• •					• •						$\sum_{i=1}^{n}$	• •		-(4)					· · ·	/		• •	• •				• •		•	• •
•		• •					• •			• •	•	• •	- ^			\square	$\vec{\mathbf{x}}$		• •		/	<u> </u>			• •	• •		• •		• •	•		• •
	• •	• •	•			•	• •			• •	•	• •		M.	$\neg V$. 1	\mathbf{P}	η^{\frown}				• •			• •	• •		• •		• •		•	• •
	• •	• •					• •			• •	•	• •		. (1 .	() .			• •			• •	• •		• •		• •			• •
	• •	• •		•			• •					• •		• •	- ^	Ċ,		/-				• •			• •	• •		• •		• •	•		• •
		• •					• •					• •				3	Ľ					• •			• •					• •			• •
																. () .																
															-																		
										• •		• •							• •														

					•																		•			•						•	
										. •		<u>^</u>	•		λ.	-	-		A (•												
											11	RS			Π.	1.	E	; []	11	. I													
																	•	Ĭ.															
															7																		
				• •											/ ~	$\overline{\mathbf{x}}$		_			• •												
	• •			• •	• •		•	• •					• •	•					-		• •	•	• •	•								• •	
	• •		• •	• •	• •			· ·			• •			•	• •		. <u> </u>	、 `	•		 	•	• •	•		• •		• •				• •	
	• •		• •	• •	• •		· (2 _`		•			• •					Ň		•		-			•					•			
	• •	•	• •	• •	• •		1	· \'		•	• •	•	• •	•	• •		• •		\mathbf{X}	•	• •)		• •		• •				• •	
			• •	• •			/	· • •	<i>b</i> .		• •	•					• •		. /	Š,	• •		11	· ·		• •		• •		•		• •	
•	• •		• •	• •	• •) (• •	3	•			• •		• •		• •			1		_/	•	١.				• •		•		• •	
	•	•	• •	• •	• •	Ļ	•		\bigcirc	~	· · ·	_		•			• •			•	\mathcal{I}	$\langle \cdot \rangle$		J_		• •		• •		•	•	•	
	• •		• •	• •	• •		•	• •		· /	· · ·	-	<u> </u>	•	•		• •				7 (X	•••••	-()	• •		• •		•	•	• •	
	• •		• •	• •	• •		•	• •		•	· / ·			<u> </u>						•	• •		~	7		•	•	• •		•		• •	•
	•		• •	• •	• •		•	• •			· · ·	<u> </u>	• •		>(1	1				•		/				• •		• •			• •	•	
	• •		• •	• •	• •		•	• •		•	• •	\sim	• •				• •			~	~		• •			• •		• •			• •	• •	•
	• •		• •	• •	• •		•			•		·		$ \mathbb{Z}$. /		<u>م</u> ا		/				•			• •		• •		•	• •	• •	
	• •		• •	• •	• •		•	• •		•	• •		. (5)			\bigcirc			•	• •		• •			• •		• •		•	• •	• •	
	• •		• •	• •	• •		•	• •		•	• •						<u>/</u>			•	• •		• •			• •		• •		•	• •	• •	
	• •			• •	• •					•	• •		• •		ע	K				•	• •		• •			• •		• •				• •	
				• •											. C).												• •					
													• •							•													
																														.			

	•								•																• •								
			 									•	0-	-	-)	-	-			6~	Ŧ												
											FI	K	7		H	1.1		E	M	ľ													
																	. •.	_															
			 • •			• •																			• •	•							
	• •	• •	 • •	•	•	• •				•	• •						• •	•	•		•	• •			• •							• •	
			• •			• •					• •			• •	_	\bigcirc			•		•			•	• •		• •					• •	
	• •		• •			• •			• •		• •				7	\bigcirc	$\langle \ \rangle$							•	• •					• •		• •	
			• •			• •					· · · ·		_	• •			. /	、 ·		<u> </u>							• •			• •		• •	
	• •	•	• •	•		• •			·								• •	\mathbf{X}			· _				• •	•		• •	•	• •		• •	
	• •	•	• •		•	• •		2	- ·		• •			•				. `	<u> </u>			-	1	•	• •		• •	• •		• •		•	
	• •	• •	• •			• •	.1	$ \cdot\rangle$			• •			• •			• •					• •	· ~ (• •	•	• •	• •	•	• •	•	• •	
	•	•	• •			• •			<u>)</u> .		• •			• •					•	\sim		•	N	$\overline{}$			• •		•	• •		• •	•
	• •	•	• •			. (1)z		-3)	• •			• •			• •		•		\mathbf{N}	•	/°	/	• •	•	• •	• •		• •	•	• •	
	• •	•	• •				~		. 9	<i>ر</i>				• •							- \	<u>ا</u> ا	(.	1			• •			• •		• •	•
	• •		• •			• •			• •		\sim .			• •							$\overline{\mathcal{A}}$		\leftarrow	(\bigcirc		• •					• •	
	• •		• •			• •					- 2		. `	· ·									•	7	<u> </u>				•				
	• •											1			\varkappa	4	<u> </u>					. ,	/		• •								
															/	ų,						<u> </u>											
													7	·	/.	Λ	۱ <i>L</i> .			/													
													. 7	5			. 1	\bigcirc	-														
															\ .		. /	<u> </u>															
															7	L	<u>/</u> .																
																6)																	
																-																	
	• •					• •								• •																			

• •		• •	• •		•									• •			•												• •		• •
											•	•	-		1-	-			A' 0	-	•					 					
										F	١K	7		. /	1.1		. 6	ľ	11	. L						 					
																			•							 					
															÷											 					
														7	• 🔾	~										 					
												/	-	. /.		\mathcal{N}		~								 					
									سند		<u> </u>					. `	λ		-							 					
							2		<u> </u>									1								 					
						.1													\ .			>	×			 					
						/		Ι.											λ)		 					
						ζ.,		. V												\mathbf{X}		. /	<u>/</u>	Ν.		 					
					<u> </u>	9e		-(5).,											.)	1	/		λ		 					
									2		-	_								. >	~ "(74		-(
										$-\lambda$			~					_	-			<u> </u>		7	<i>–</i>	 					
											Ν.		. `	\searrow		/	<u> </u>					/	/	7.		 					
															4	、					/	· ·				 					
												\nearrow			Λ	λ	ب .		/	<u> </u>						 					
												1	5			. `	\bigcirc	_								 					
													$\widetilde{\mathbf{r}}$	Ν.		. /	i									 					
														. 2			4 N 14	- ·								 					
															6		F 16]=	- 11							 					
															-											 					

FIRST ATTEMPT 2 5 in sink SCC f[6] = 11 Not 6

FIRST ATTEMPT f[1] = 3 71 f[2] = 2f[10] = 9 (10)8 f[8]=7 f11=1 f[4]=5 f[9]=8 (+ f[7]=6 6 f[5]=10 36. f[6] = 11

f[11] = 3 $f[22] = 2$ $f[3] = 4$ $f[4] = 5$ $f[4] = 8$ $f[4] = 5$ $f[4] = 8$ $f[6] = 7$ $f[6] = 11$	FIRST AT	rempt		
f[1]=2 $f[1]=2$ $f[1]=1$ $f[1]=5$ $f[1]=8$				
f[1] = 2 $f[1] = 2$ $f[1] = 1$ $f[1] = 1$ $f[1] = 5$ $f[1] = 5$ $f[1] = 8$ $f[1] = 7$ $f[1] = 8$ $f[1] = 7$	fl.	[11] = 3		
f[1] = 1 $f[4] = 5$ $f[4] = 5$ $f[4] = 8$ $f[8] = 7$ $f[7] = 6$				
f[1] = 1 $f[4] = 5$ $f[4] = 5$ $f[1] = 8$ $f[8] = 7$ $f[8] = 7$. flin	1-0	
f[1]=1 $f[4]=5$ $f[1]=8$ $f[8]=7$ $f[7]=6$	\mathcal{I}		1-1	
f[1]=8 f[1]=8 f[1]=8 f[1]=8 f[1]=1 f[1]=1 f[1]=1 f[1]=1				
f[7] = 6	TL4J-	.5 f[1]=8 7	f[8]=7	
SE f [6] = 11				
	3 6 ²	f[6] = 11		
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			· · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				

· · · · · · ·	FIRST ATTEMPT
. 	f[n] = 3 $f[2] = 2$
. .	f[0] = 9
. 	$f[4] = 5 \qquad f[4] = 5 \qquad f[1] = 8 \qquad f[8] = 7$ $f[5] = 10 \qquad f[7] = 6$
-	Perhaps the "smallest-label" vertex is always in "Source" Scc? (as per topological ordering)

· · · · · · · ·	FIRST ATTEMPT
· · · · · · ·	f[n] = 3
 	f[2]=2
· · · · · · ·	f[0] = 9
	f[1] = 4
	$f[4] = 5 \qquad f[1] = 8 \qquad f[8] = 7$
	f[7] = 6
	f[5]=10 f[6]=11
-	Perhaps the "smallest-label" vertex is always in "source" Scc? (as per topological ordering)

KEY OBSERVATION Theorem: let f be the labeling of directed graph & generated by the topological ordering algorithm on G (arbitrary ordering of vertice). Let S1, S2 be two "adjacent" SCCs of G, i.e., there is an edge (V, W) with VES, and WES. Then, $\min_{x \in S_1} f(x) < \min_{y \in S_2} f(y)$ W O

KEY OBSERVATION Theorem: let f be the labeling of directed graph & generated by the topological ordering algorithm on G (arbitrary ordering of vertice). Let S1, S2 be two "adjacent" SCCs of G, i.e., there is an edge (V, W) with VES, and WES. Then, $\min_{x \in S_1} f(x) < \min_{y \in S_2} f(y)$ nes_i hecursive call of some vertex in S1 finishes W O after that of all × · · · · · a a la a vita a a a a vertices in S_2 .

· · · · · · · · · ·	KEY OBSERVATION
Theorem :	let f be the labeling of directed graph & generated by the
	topological ordering algorithm on G (orbitrary ordering of vertice).
· · · · · · · · · ·	Let S1, S2 be two "adjacent" SCCs of G, i.e., there is
· · · · · · · · · ·	an edge (v, w) with ves, and wes. Then,
· · · · · · · · · · · ·	$ \min_{x \in S_1} f(x) < \min_{y \in S_2} f(y) . $
e e	reneralization of "every DAG has a topological ordering".

KEY OBSERVATION
Theorem: let f be the labeling of directed graph & generated by the
topological ordering algorithm on G (orbitrary ordering of vertice).
Let S1, S2 be two "adjacent" SCCs of G, i.e., there is
an edge (V, W) with VES, and WES. Then,
$ \min_{\mathbf{h} \in S_1} f(\mathbf{h}) < \min_{\mathbf{h} \in S_2} f(\mathbf{h}) $
Conollary: The vertex v with $f[v] = 1$ must lie in source SCC.

					• •		• •	•			• •							• •		• •	•	•	• •			• •			
0		2																											
ľ		L	1																										
. I I			Ĩ.,		• •																								
	• •				• •		• •	• •							•	• •	•			• •									
	• •				• •		• •	• •						• •		• •	•			• •						• •	• •		1
	•				• •		• •									• •		• •		• •			• •		•	• •	•		1
					• •		• •	•		•								•		• •	•		• •		•	• •	•		*
	• •				• •		• •	•		•				•		• •		• •		• •	•		• •		•	• •	•		•
	• •				• •		• •	•		•	• •			•				• •		• •	•		• •	•	•	• •	• •	•	•
					• •		• •			•										• •			• •		•		• •		
												•	•						0										
	• •				• •		• •	• •							•	• •	•			• •									
	• •				• •			• •						• •		• •	•									• •	• •		1
	• •				• •													• •					• •		•	• •	•		1
	• •				• •		• •	• •		•				• •		• •	•	• •		• •			• •		•	• •	•	•	1
	•				• •		• •	•		•	• •			•				• •		• •	•		• •			• •	• •	•	•
	• •				• •		• •	•		•				•		• •		• •		• •	•		• •		•	• •	•		•
	•				• •		• •	•		•	• •		•	•		• •		• •		• •	•		• •			• •	• •	•	
	• •				• •		• •	•		•				• •		• •		• •		• •	•		• •		•	• •	• •		
					• •											• •							• •				• •		

Proof	Case	Î	Topological	algo-	discovers	Some 1	serter in		before S2	•
		• • • •	· · · · · · · · ·	· · V · ·						• •
							• • • • •			• •
							• • • • •			• •
										• •
										• •
				· · · · ·	<u>.</u>		· _ · · ~ ·			
(π	. 1.1						<i>(</i>)		
	all 1	IO[pological al	qo- 0	iscovers so	me ver	ler in	≥ <u>2</u> b ¹	efore spin	
	are 1		pological al	go- a	iscovers so	me ver	ler in	2 D	efore SI.	0 0
	are 1		pological al	go-a	iscovers so	me ver	ler in	≥ ₂ b	efore SI.	•••
	All I		xological al	go-a	iscovers so	me ver	ler in	≥ <u>2</u> b	etare SI	· ·
		10	xological al	go-a	1500685 50	me ver	ler in	≥ <u>2</u> 0-	efore S1	· · ·
			xological al	go- a	150005 50	me Ver		≥ <u>2</u> 0-	efore Sp	· · ·
			xological al	90- 0	1500682 20	mever		≥ <u>2</u> 0-	efore Sp	
			xological Al		1500682 50	mever		≥ <u>2</u> 0-	efore Sj	
			xlogical Al		150005 50	me ver				
			xological Al		ISCOVES S'O	me Ver		≥ <u>2</u> 0 [⊥]	efore Sp	
					IS COVES S'O	me Ver		> <u>2</u> b		
					15 COV 23 5 0	me Ver				
					IS COVES S'O	mever		> <u>2</u> b	efore Sp	

Proof	Case I	Topological algo	discovers some	e verter in S ₁ before S ₂ .
· · · · · · ·		All vertices in	S ₂ heachable	from some vertex in S1.
· · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · ·	Case II: 7	topological algo-	discovers some	verter in S2 before S1.
· · · · · · ·				
	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·		
			· ·	

Proof: Case I: Topological algo- discovers some verter in S, before S2. All vertices in S2 heachable from some vertex in S1. \Rightarrow Recursive calls for all vertices in S₂ finish before that of some vertex in S1. Case II : Topological algo- discovers some verter in S2 before S1.

Proof	Case I: Topological algo-discovers some verter in S, before S2.
· · · · · · · · ·	All vertices in S_2 reachable from some vertex in S_1 .
· · · · · · · · ·	\Rightarrow Recursive calls for all vertices in S ₂ finish
	before that of some vertex in S ₁ .
	Case II: Topological algo-discovers some verter in S2 before S1.
	Recall : SCC meta-graph is acyclic
· · · · · · · ·	
· · · · · · · · ·	
· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

Proof: Case I: Topological algo- discovers some verter in S, before S2.
All vertices in S_2 heachable from some vertex in S_1 .
\Rightarrow Recursive calls for all vertices in S_2 finish
before that of some vertex in S1.
Case II: Topological algo- discovers some verter in S2 before S1.
Recall : SCC meta-graph is acyclic
Si is unreachable from S2

Proof: Case I: Topological algo. discovers some verter in S, before S2. All vertices in S_2 heachable from some vertex in S_1 . \Rightarrow Recursive calls for all vertices in S2 finish before that of some vertex in S1. Case II: Topological algo- discovers some verter in S2 before S1. Recall : SCC meta-graph is acyclic Si is unreachable from S2 \Rightarrow Recursive calls for all vertices in S_2 finish before that of every vertex in S1.

Proof: Case I: Topological algo- discovers some verter in S, before S2. All vertices in S_2 heachable from some vertex in S_1 . \Rightarrow Recursive calls for all vertices in S2 finish before that of some vertex in S1. Case II: Topological algo- discovers some verter in S2 before S1. Recall : SCC meta-graph is acyclic Si is unreachable from S2 \Rightarrow Recursive calls for all vertices in S_2 finish before that of every vertex in S1.

							· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
What	WC	have :		way	0f	identi fying		vertex		SOURCE	S CC	•
What	WC	want:	A	way	of	identi fying		vertex	in	sink	SCC	•
What's	the	fix :	· · ·	· · · · · ·		· · · · · · · · · ·	· · ·	· · · · · ·	· · ·	· · · · · · ·		•
	• • •		• • •					· · · · · ·				•
						• • • • • • • •	• • •					
			0 0 0									
· · · · · · ·	· · ·		· · ·						· · ·	· · · · · · ·		•
· · · · · · · · ·	 						· · · ·			· · · · · · · · ·		•

What we	have: F	t way of	identifying A	verter in	source SCC
What we	want: A	way of	identifying a	verter in	sink scc
What's the	e fix : R	everse the	graph!	· · · · · · · · · · ·	· ·

```
hev
 J
                                        J . . .
                                      . . . .
. . . . . . . .
                                    J.
   . . .
 ()....
```

her G ¥ . SCCs stay the same!

hPV Source SINK Source / sink in meta graph of Sink / Source ner